




వేదములు

విచారణ

వేద గణితము





సదాశివ సమారంభాం


గురు దక్షిణామూర్తి


గురు వేదవ్యాస మహర్షి


గురు శుక మహర్షి


గురు నారద మహర్షి


గురు వాల్మీకి మహర్షి


గురు శ్రీకృష్ణ

శంకరాచార్య మధ్యమాం


గురు దత్తాత్రేయ


గురు బాబాజీ


గురు గౌతమ బుద్ధ


గురు ఆదిశంకరాచార్య

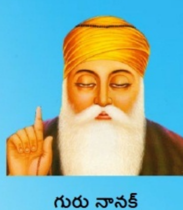

గురు రామానుజాచార్యులు


గురు జ్ఞానేశ్వర్


గురు రవిదాస్


గురు కబీర్ దాస్


గురు చైతన్య మహా ప్రభువు

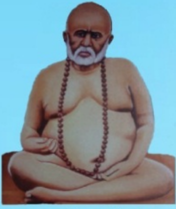

గురు నానక్


గురు రాఘవేంద్ర స్వామి


గురు వీరబ్రహ్మేంద్ర స్వామి


యోగి వేమన

అస్మదాచార్య పర్యంతాం

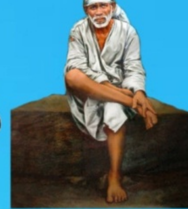

గురు త్రైలింగ స్వామి


గురు లాహిరి మహాశయ



గురు రామకృష్ణ పరమహంస, అమ్మ శారదాదేవి


గురు వివేకానంద


గురు సాయి బాబా


గురు అరబిందో


గురు రమణ మహర్షి


గురు యోగానంద


గురు భక్తివేదాంత ప్రభుపాద


గురు మళయాళస్వామి


గురు విద్యాప్రకాశానందగిరి


గురు చంద్రశేఖర పరమాచార్య

వందే గురుపరంపరాం..




నన్ను "నేను" తెలుసుకోవటానికి

నన్ను "నేను" మార్చుకోవటానికి

నన్ను "నేను" చేరుకోవటానికి

మరియు అత్యుత్తమ జీవన విధానానికి

కావలసిన భక్తి,జ్ఞాన,కర్మ,ధర్మ సమాచారం ఒకేచోట తెలుగులో ఉచితంగా!

సాధారణంగా వేదాంతం తెలుసుకోవాలనే కోరిక వుంటుంది, కాని గ్రంధాలు అందుబాటులో లేవు. ఇంకొకరి దగ్గర గ్రంధాలు వుంటాయి, కాని జిజ్ఞాసువులకి ఎక్కడ ఉన్నవో తెలియదు. అలాగే కొన్ని లైబ్రరీ లో కొన్ని రకాల పుస్తకాలు మాత్రమే లభ్యం అవుతున్నాయి, అంతేగాక విలువైన గ్రంధాలు సరైన సంరక్షణ లేక కనుమరుగైపోతున్నాయి, కనుక మన అందరి కోసం భారత ప్రభుత్వం పురాతన ఆధ్యాత్మిక గ్రంధాలను సంరక్షించే నిమిత్తం ఎంతో శ్రమతో కంప్యూటరీకరణ ద్వారా ఒక చోట చేర్చుతూ ఆన్ లైన్ చేయటం జరిగింది. ఇటువంటి విలువైన జ్ఞాన సంపదను మరింత సులభంగా అందుబాటులోకి తీసుకురావటానికి సాయి రామ్ సేవక బృందం ఉడతా భక్తి గా ఇప్పటివరకి దాదాపు **5000** పుస్తకాలను వివిధ వర్గాలుగా విభజించి PDF(eBOOK) రూపంలో ఆన్ లైన్ లో ఉచితంగా అందించటం జరిగింది. కనుక ప్రతి ఒక్కరు ఈ సదవకాశాన్ని సద్వినియోగం చేసుకోగలరు. ఇందుకు సహాయం అందించిన భారత ప్రభుత్వపు వెబ్ సైట్(డిజిటల్ లైబ్రరీ అఫ్ ఇండియా http://www.new.dli.ernet.in), ఆర్కైవ్ వెబ్ సైట్(https://archive.org), గూగుల్ వెబ్ సైట్(https://www.google.co.in), మైక్రోసాఫ్ట్ వెబ్ సైట్(http://www.microsoft.com) కు మేము ఋణపడివున్నాము.అలాగే ఇటువంటి బృహత్తర కార్యక్రమానికి పెద్ద మొత్తం లో గ్రంధాలను అందించిన తిరుమల తిరుపతి దేవస్థానమునకు కూడా మనం ఋణపడివున్నాము. సాయి రామ్ సేవక బృందం కోరుకొనేది ఒక్కటే, ప్రతి ఇల్లు ఆధ్యాత్మిక జ్ఞాన గ్రంధాలతో నిండిపోవాలన్నదే మా కోరిక.

ఈ గ్రంధాలను ఉచితంగా ఆన్ లైన్ లో చదువుటకు, దిగుమతి(డౌన్లోడ్) చేసుకొనుటకు గల మార్గాలు:

1) భారత ప్రభుత్వపు వెబ్ సైట్: http://www.new.dli.ernet.in లేక http://www.dli.ernet.in
2) సాయి రామ్ వెబ్ సైట్: http://www.sairealattitudemanagement.org
3) సాయి రామ్ గూగుల్ సైట్: https://sites.google.com/site/sairealattitudemanagement
4) ఆర్కైవ్ వెబ్ సైట్: https://archive.org/details/SaiRealAttitudeManagement

ఈ జ్ఞాన యజ్ఞం పై గల సలహాలు,సూచనలకు సేవక బృందాన్ని సంప్రదించుటకు: sairealattitudemgt@gmail.com
సాయి రామ్ భక్తి,జ్ఞాన సమాచారం: https://www.facebook.com/SaiRealAttitudeManagement
సాయి రామ్ భక్తి,జ్ఞాన సంబంధ వీడియోలు: https://www.youtube.com/user/sairealattitudemgt

ఈ జ్ఞాన యజ్ఞంలో ప్రతి ఒక్కరు పాల్గొని, ఈ అవకాశాన్ని సద్వినియోగం చేసుకొని,మీరు సంతృప్తులైతే మరొక సాధకునికి, జిజ్ఞాసువులకు మార్గం చూపించగలరని ఆశిస్తున్నాము. మీరు చదువుకోవటంలో ఏమైనా ఇబ్బంది కలిగితే సేవక బృందంను సంప్రదించగలరు. ఒకవేళ మా సేవలో ఏమైన పొరపాటు వస్తే మన్నించగలరు.

ఈ గ్రంధపు భారత ప్రభుత్వ డిజిటల్ లైబ్రరీ గుర్తింపు సంఖ్య: 2990100071739

గమనిక: భక్తి,జ్ఞాన ప్రచారార్ధం **ఉచితంగా eBook** రూపంలో భారత ప్రభుత్వపు సహాయంతో ఇవ్వడం జరిగింది. ఈ గ్రంధముపై వ్యాపార,ముద్రణ హక్కులు రచయిత,పబ్లిషర్స్ కి గలవు, కనుక వారిని సంప్రదించగలరని మనవి చేసుకొంటున్నాము.

Sai**R**eal**A**ttitude**M**anagement(SAI RAM) - సాయి నిజ వ్యక్తిత్వ నిర్వహణ(సాయి రామ్)

* సర్వం శ్రీ సాయినాథ పాద సమర్పణమస్తు *

భారత ప్రభుత్వపు వెబ్ సైట్ - డిజిటల్ లైబ్రరీ అఫ్ ఇండియా

http://www.new.dli.ernet.in

Digital Library of India: Inc ×

www.new.dli.ernet.in

Digital Library of India

Hosted by: Indian Institute of Science, Bangalore in co-operation with
CMU, IIIT-H, NSF, ERNET and MCIT for the Govt. of India and 21 major participating centres.

Home | Vision | Mission | Goals | Benefits | Content Selection | Current Status | People | Funding | Copyright Policy | FAQ | RFP

Books Journals Newspapers
Palm-Leaves (Manuscripts)

Title: Ramayanam
Author:
Year: to
Subject: Any Subject
Language: Telugu
Scanning Centre: Any Centre
Clear | Search

Presentations and Report
Statistics Report
Status Report
Feedback | Suggestions |
Problems | Missing links or Books

Click here for PDF collection
DLI MIRROR at IUCAA Data Center PUNE

DLI

For the first time in history, the Digital Library of India is digitizing all the significant works of Mankind.

Click Here to know More about DLI New!

Books	Journals	Newspapers	Manuscripts
Rashtrapati Bhavan CMU-Books Sanskrit TTD,Tirupathi Kerala Sahitya Akademi	INSA	Times of India Indian Express The Hindu Deccan Herald Eenadu Vaartha	Tamil Heritage Foundation AnnaUniversity NEW!

Title Beginning with.

A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z

Author's Last Name

A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z

Year

1850-1900 | 1901-1910 | 1911-1920 | 1921-1930 | 1931-1940 | 1941-1950 | 1951-

Subject

Astrophysics | Biology | Chemistry | Education | Law | Mathematics | Mythology | Religion | For more subjects...

Language

Sanskrit | English | Bengali | Hindi | Kannada | Marathi | Tamil | Telugu | Urdu

అతి విశిష్టం ఈ దానం!

స్వామి వివేకానంద

"దానాలలోకెల్లా ఆధ్యాత్మిక విద్యాదానం చాలా శ్రేష్ఠమైంది! దాని తరువాతిది లౌకిక జ్ఞానదానం, ప్రాణదానం, అన్నదానం" అని వ్యాసమహర్షి చెప్పారు.

మన ఆధ్యాత్మిక జ్ఞానం భారతదేశ హద్దులలో నిలిచి పోకూడదు. లోకమంతటినీ ఆవరించాలి! ఇలా లోకవ్యాప్తమైన ధర్మప్రచారాన్ని మన పూర్వులు చేశారు. హైందవ వేదాంతం ఎన్నడూ ఈ దేశం దాటి పోలేదని చెప్పేవారూ, మతప్రచారార్థం తొలిసారిగా, పరదేశాలకు వెళ్ళిన సన్యాసిని నేనే అని చెప్పేవారూ, తమ జాతిచరిత్ర నెరుగని వారే! ఇలాంటి సంఘటనలు ఎన్నోసార్లు జరిగాయి. అవసరమైనప్పుడల్లా, భారతీయ ఆధ్యాత్మిక జ్ఞానప్రవాహం వెల్లువలా లోకాన్ని ముంచెత్తుతూ వచ్చింది.



రాజకీయ ప్రచారాన్ని రణగొణధ్వనులతో, యోధులతో సాగించవచ్చు. అగ్నిని కురిపించి, కత్తిని ఝళిపించి, లౌకిక జ్ఞానాన్నీ, సంఘనిర్మాణ విజ్ఞానాన్నీ విరివిగా ప్రచారం చేయవచ్చు. కానీ ఆధ్యాత్మిక జ్ఞానదానం కళ్ళకు కనిపించకుండా, చెవులకు వినిపించకుండా కురుస్తూ, రోజా పువ్వుల రాసుల్ని వికసింపజేసే మంచులాగా నిశ్శబ్దంగా జరగవలసి ఉంది. భారతదేశం నిరాడంబరంగా, లోకానికి మళ్ళీ మళ్ళీ చేస్తూ వచ్చిన దానమిదే!

మిత్రులారా! నేను అవలంబించే విధానాన్ని తెలియజేస్తాను వినండి. భారతదేశంలోనూ, ఇతర దేశాల్లోనూ మన పారమార్థిక ధర్మాలను బోధించడానికి తగినవారుగా మన యువకుల్ని తయారు చేయడానికై భారతదేశంలో కొన్ని సంస్థలను నెలకొల్పాలి! ఇప్పుడు మనకు కావలసింది బలిష్ఠులు, జవసంపన్నులు, ఋజువర్తనులు, ఆత్మ విశ్వాసపరులు అయిన యువకులు. అలాంటి వారు నూరుమంది దొరికినా, ప్రపంచం పూర్తిగా పరివర్తన చెందగలుగుతుంది!!

ఇచ్ఛాశక్తి తక్కిన శక్తులన్నిటి కన్నా బలవత్తరమైంది. అది సాక్షాత్తూ భగవంతుని దగ్గరి నుండి వచ్చేదే కాబట్టి దాని ముందు తక్కినదంతా లొంగిపోవలసిందే. నిర్మలం, బలిష్ఠం అయిన 'ఇచ్ఛ' (సంకల్పం) సర్వశక్తిమంతమైంది. దానిలో మీకు విశ్వాసం లేదా? ఉంటే మీ మతంలోని మహోన్నత ధర్మాలను ప్రపంచానికి బోధించడానికై కంకణం కట్టుకోండి. ప్రపంచం ఆ ధర్మాల కోసమై ఎదురుచూస్తోంది. అనేక శతాబ్దాలుగా ప్రజలకు క్షుద్రసిద్ధాంతాలు నేర్పడం జరిగింది. వారు వ్యర్థులని ప్రపంచమంతటా బోధలు జరిగాయి. ఎన్నో శతాబ్దాల నుండి వారు ఈ బోధనల వల్ల భయభ్రాంతులై, పశుప్రాయులైపోతున్నారు. తాము ఆత్మస్వరూపులమనే మాటను వినడానికైనా వారెన్నడూ నోచుకోలేదు. "నీచాతినీచుడిలో కూడా ఆత్మ ఉంది. అది అమృతం, పరమ పవిత్రం, సర్వశక్తిమంతం, సర్వవ్యాపకమైనది" అని వారికి ఆత్మను గురించి చెప్పండి. వారికి ఆత్మవిశ్వాసాన్ని ప్రసాదించండి. ❖

మూలం: శ్రీ రామకృష్ణ ప్రభ - ఫిబ్రవరి 2014

+ − × ÷ =

డా॥ టి. సత్యనారాయణరాజు

వేద గణితము

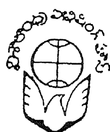
❖ మౌఖిక గుణకార, భాగహార పద్ధతులు ❖

1234567890

వేద గణితము

(మౌఖిక గుణకార, భాగహార పద్ధతులు)

డా॥ తోటకూర సత్యనారాయణరాజు
M.Sc.,B.Ed.



విశాలాంధ్ర పబ్లిషింగ్ హౌస్
విజ్ఞాన భవన్, 4-1-435 బ్యాంక్ స్ట్రీట్
హైదరాబాద్-500 001.

నా మాట

సాధారణముగ విద్యార్థులకు లెక్కలంటే భయం, తలనొప్పి, ఆసక్తి లేకపోవుట కనిపిస్తుంది. దీనికి కారణం చిన్నతనములో వారి చేత బండగ ఎక్కాలు బట్టీవేయించడం ఒకటి. గణితములో ప్రావీణ్యత కావాలంటే ఎక్కాలు తప్పనిసరి తద్దినం. గణన యంత్రాలను ఉపయోగించుట ద్వారా విద్యార్థులకు ఈ బెడద తప్పించినా వాటిమీద ఆధారపడటం అవిటి బతుకే అవుతుంది. నిలుచున్న పళంగా ఏదైనా గుణకారము చేయవలసివస్తే ఆగండి, ఆగండి, ప్రస్తుతము నా దగ్గర గణన యంత్రము లేదు. కావున ఇపుడు చేయలేను అనడం సిగ్గుచేటు. అందుచేత ఎక్కాలు బాగారావలసిందే. బాల్య దశలో కొంతవరకు ఎక్కాలను అధ్యయనము చేయించి వాటిని జ్ఞాపకముంచుకొనుటకు కొన్ని మెలకువలు నేర్పినచో మరచిపోవుటకు ఆస్కారముండదు. గణితమన్న ఆసక్తి కలిగి, వారిలో ఉత్సాహము పెల్లుబికి గణిత శాస్త్రములో అభిరుచి అలవడుతుంది అని నా అభిప్రాయం.

గణిత శాస్త్రంలో నాకు గల అభిరుచి మూలముగా వివిధ గణిత గ్రంధాలలో గల వింతలు, తమాషాలు, సులభ పద్ధతుల గుణకార, భాగహార పద్ధతులు చిన్నతనము నుండి అధ్యయనము చేయుట ప్రారంభించినాను. నా యీ తొలిపుస్తకాన్ని విద్యార్థి లోకానికి, గణిత శాస్త్రం ఎడల ఆసక్తిగల విజ్ఞులకు సమర్పించాను.

విజ్ఞుల నుండి పొందిన మన్ననలతో మరి ఐదు పుస్తకములను వెలువరించాను. వేదగణితము అనేక వేల ప్రతులు విక్రయింపబడి చతుర్థ ముద్రణకు వచ్చినది. ఎందరెందరినుంచో అనేక ప్రశంసలు పొంది ధన్యుడనైనాను. నా ద్వితీయ రచన వేదగణితము (ఇంగ్లీషు) నకు టి.టి.డి. దేవస్థానమువారు యిచ్చిన రు.5,000/- నా రచనలకు మరికొంత ప్రోత్సాహము కలిగింది. నా ప్రసంగములను టి.టి.డి. వారు వారి ఆధ్వర్యములో గల కాలేజీలలోను, హైస్కూలులలోను ఏర్పాటు చేసి మరికొంత ప్రోత్సాహము కలుగజేసిరి. తదాదిగ అనేక ప్రసంగములు, విద్యాగోష్ఠులలో పాల్గొనుచు విద్యాలోకానికి ఉపయోగపడవలెనని నా అభిలాష.

అనేక ప్రసంగములు రేడియోలద్వారాను, టి.వి.ల ద్వారాను ప్రసారము అయినవి. అనేక విద్యాసంస్థలు నాకు యిచ్చిన ప్రోత్సాహముతో అనేక గ్రంధములు వరుసగ వెలువరించాను.

మౌఖిక గుణకార, భాగహార పద్ధతులు, మరెన్నో సులభ పద్ధతులు అధర్వణ వేదములో వ్రాయబడినవి. వీటిని అధ్యయనము చేసి ప్రప్రథమముగ పూజ్యశ్రీ భారతీకృష్ణతీర్థ శ్రీ పూరీ శంకరాచార్యులువారి ``Vedic Mathematics" పుస్తకములో 16 సూత్రాలు వివరించారు. నేను బెనారసు హిందూ యూనివర్సిటీలో M.Sc. చదివే రోజులలో ఆ పుస్తకాన్ని చదివితిని. అప్పటి నుండి ఉత్తేజితుడనై విద్యార్థులకు ఆసక్తి కలిగించుటకు, సులభ పద్ధతులను అందించుటకు ఉపక్రమించి యీ పుస్తకాన్ని వెలువరించాను.

– రచయిత

పత్రికల అభిప్రాయాలు

గాభరాపెట్టని గణితం మాష్టారు

గణితం అంటే అందరికి గాభరాయే - కాని అంత గాభరా అనవసరం అంటారు గణితం మాష్టారు తోటకూర సత్యనారాయణరాజు. లెక్కలు సులభతరం చేసే సులువులను, చిట్కాలను ఆయన తనకు ఓపిక ఉన్న మేరకు ప్రచారం చేస్తున్నారు. భారతదేశపు గణిత శాస్త్రవేత్తలు, అంకెలతో అద్భుతాలు, వ్రేళ్ళతో గణితము మొదలగు ప్రతులను ప్రచురించబోతున్నారు.

(ఆంధ్రభూమి, హైదరాబాద్, తేది: 18-7-1985)

గణితమంటే గాభరా అక్కర్లేదు

లెక్కల టీచర్లందరూ లెక్కలు బోధిస్తారు. కాని లెక్కల్లోకి వచ్చే లెక్కల టీచర్లు అరుదు. అలాటి వారిలో తోటకూర సత్యనారాయణరాజు ఒకరు. గణితం విద్యార్థులను గందరగోళ పరుస్తుంది. అందుకే లెక్కలంటే వారికి గాభరా లెక్కల బోధనలో చిక్కుముడులు విప్పి, అంకెలతో ఆటలాడించి, కష్టతరమనుకుంటున్న అంశాలను శ్రీ రాజుగారు బోధించుచున్నారు. కూడిక, తీసివేత, గుణకారం, భాగహారం, వర్గములు, వర్గమూలాలు, ఘాతాలు, ఘాతాంకాలు మొదలైనవాటిని లెక్కగట్టడంలో సులువైన పద్ధతి ప్రవేశపెట్టారు. ఇందుకోసం ఆయన ప్రాచీన భారతీయుల గణిత విజ్ఞానాన్ని వేదగణితం పేరుతో వెలుగులోనికి తెచ్చారు.

(ఈనాడు, భీమవరం, తేది: 19-3-1985)

ఇందులో...



1. వేదగణితపు ఎక్కాలు

గణితం అంటే చాలామందికి భయం. ఆసక్తి లేకపోవటం జరుగుతుంది. దీనికి కారణం చిన్నతనం నుండి ఎక్కాలు కంఠస్థము చేయుట ఒకటి. గణితము నేర్చుకొనుటలో మెలకువలు, సులువు పద్ధతులు తెలిసికొన్నచో గణితాన్ని నేర్చుకొనుట వినోదముగా వుంటుంది, గణితమన్న ఆసక్తి కలుగుతుంది.

ఎక్కాలను అధ్యయనము చేయుటకు, జ్ఞాపకముంచుకొనుటకు అతి సులువు పద్ధతులున్నాయి. కంఠస్థము చేయనవసరము లేదు. 5×5 ఎక్కాలు వచ్చినా చాలు. పదిని ఆధారముగా చేసికొని ఎక్కాలను లెక్క కట్టుకోవచ్చును. ఎక్కాలను రెండు విధములుగా విభజిస్తాము. (1) పదిలోపు ఎక్కాలు (2) పదికంటె ఎక్కువ ఎక్కాలు. ముందుగా పదికిలోపు ఎక్కాలను పరిశీలిద్దాం.

పదికిలోపు ఎక్కాలు

పద్ధతి: బీజగణిత సూత్రము ద్వారా ఎక్కాలను లెక్క కట్టుకోవచ్చును.

$$(x-a)(x-b) = x(x-a-b) + ab$$

రెండు అంకెలనూ పదినుండి తీసివేయాలి. వాటి లబ్ధమును ఒకట్ల స్థానముగ రాయాలి.

మొదటి అంకె నుండి రెండవ అంకె 10కి ఎంత తక్కువో దానిని తీసివేయాలి. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయాలి.

ఉదాహరణకు 9×8 కావలెను అనుకోండి.

ఇవి రెండును 10కి దగ్గరగ నున్నవి. కావున 10 తీసివేయగ వరుసగ 1, 2లు వస్తాయి. వాటి లబ్ధము $1 \times 2 = 2$ను ఒకట్ల స్థానముగ రాయాలి.

రెండవ అంకె 8, పదికి 2 తక్కువ కావున దానిని మొదటి అంకె 9 నుండి తీసివేయాలి. $9 - 2 = 7$ వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి.

ఇపుడు $9 \times 8 = 72$ అవుతుంది.

ఇట్లే 7×9 కావలెను అనుకోండి

7, 9లను 10 నుండి తీసివేయగ 3, 1లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము $3 \times 1 = 3$ను ఒకట్ల స్థానముగ రాయాలి.

రెండవ అంకె 9 పదికి 1 తక్కువ కావున దానిని మొదటి అంకె 7 నుండి తీసివేయగ $7 - 1 = 6$ వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. ఇపుడు $7 \times 9 = 63$ అవుతుంది.

ఇట్లే 8×8లు కావలెను అనుకోండి.

8, 8లను పదినుండి తీసివేయగ 2, 2లు వస్తాయి. వాటి లబ్ధము $2 \times 2 = 4$ను ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

రెండవ అంకె 8 పదికి 2 తక్కువ కావున దానిని మొదటి అంకె 8 నుండి తీసివేయగ $8 - 2 = 6$ వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. ఇపుడు $8 \times 8 = 64$ అవుతుంది.

కొన్ని సమయములలో పది నుండి తీసివేయగ వచ్చు అంకెల లబ్ధము రెండు అంకెలుగల సంఖ్యగా ఉండును. అప్పుడు ఒకట్ల స్థానమును ఒకట్ల స్థానముగ తీసికొని, పదుల స్థానమును పదుల స్థానమునకు కలపాలి.

ఉదాహరణకు 7×6 కావలెను అనుకోండి.

7, 6లను పదినుండి తీసివేయగ 3, 4లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము $3 \times 4 = 12$ వస్తుంది. దానిలో 2ను ఒకట్ల స్థానముగ తీసికోండి. పదుల స్థానముల మనస్సునందుంచుకోండి.

రెండవ అంకె 6 పదికి 4 తక్కువ కావున దానిని మొదటి అంకె 7 నుండి తీసివేయగ $7 - 4 = 3$ వస్తుంది. దానికి మనస్సునందుగల 1ని కలుపగ 4 అవుతుంది. దానిని పదుల స్థానముగ తీసుకోండి.

ఇపుడు $7 \times 6 = 42$ అవుతుంది.

ఇట్లే సమయస్ఫూర్తిగ పదికిలోపు ఎక్కాలను గుణించుకోవచ్చు.

క్లిష్టసమస్య: 9×12 కావలెను అనుకోండి. రెండు అంకెలు కలిపి 10ని తీసివేయండి. $9 + 12 - 10 = 11$ వస్తుంది. దీనిని పదులుగ రాయగ 110 అవుతుంది.

రెండు అంకెలను 10 నుండి తీసివేయగ 1, −2లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము −2 అవుతుంది. 110 నుండి 2ను తీసివేయగ $110 - 2 = 108$ వస్తుంది.

ఇపుడు $9 \times 12 = 108$

మరో ఉదాహరణకు 8×14 కావలెను అనుకోండి.

రెండు అంకెలు కలిపి 10ని తీసివేయండి $8 + 14 - 10 = 12$ వస్తుంది. దీనిని పదులుగ రాయుగ 120 అవుతుంది.

రెండు అంకెలను 10 నుండి తీసివేయగ 2, −4లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము $2 \times -4 = -8$. 120 నుండి 8ని తీసివేయగ $120 - 8 = 112$ వస్తుంది.

ఇపుడు $8 \times 14 = 112$ అవుతుంది. ఇదే విధముగ సమయస్ఫూర్తిగ గుణించుకోవచ్చును.

పదికంటె ఎక్కువ ఎక్కాలు

ఒకట్ల స్థానములను గుణించవచ్చు. అంకెల లబ్ధమును ఒకట్ల స్థానముగ రాయాలి. మొదటి సంఖ్యకు రెండవ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానపు అంకె కలుపగ వచ్చు సంఖ్య వందలు, పదులు స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 12×13 కావలెను అనుకోండి.

ఒకట్ల స్థానము విలువలు 2, 3లను గుణించగా వచ్చు అంకెల లబ్ధము $2 \times 3 = 6$ను ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

మొదటి సంఖ్య 12నకు రెండవ సంఖ్య 13లోని ఒకట్ల స్థానము 3ను కలుపగ వచ్చు $12 + 3 = 15$ను వందలు, పదుల స్థానముగ తీసికోండి. ఇపుడు $12 \times 13 = 12 + 3, 2 \times 3 = 156$ అవుతుంది.

ఇట్లే

$$13 \times 13 = 13 + 3, \quad 3 \times 3 = 169$$
$$12 \times 14 = 12 + 4, \quad 2 \times 4 = 168$$
$$11 \times 14 = 11 + 4, \quad 1 \times 4 = 154$$
$$12 \times 12 = 12 + 2, \quad 2 \times 2 = 144$$
$$11 \times 13 = 11 + 3, \quad 1 \times 3 = 143$$

ఒక్కొక్కప్పుడు ఒకట్ల స్థానపు విలువలను గుణించినపుడు రెండు అంకెలుగల సంఖ్యలు వచ్చినచో ఒకట్ల స్థానమును లబ్ధములోని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానమును మనస్సునందుంచుకోవాలి.

మొదటి సంఖ్యకు రెండవ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానపు అంకె కలుపగ వచ్చు సంఖ్యకు మనస్సులోగల అంకెను కలుపగ వచ్చు సంఖ్యను వందలు పదుల స్థానముగ రాయాలి.

ఉదాహరణకు 16×17లు కావలెను అనుకోండి.

ఒకట్ల స్థానపు విలువలు 6, 7లను గుణించగ వచ్చు $6 \times 7 = 42$లోని 2ను ఒకట్ల స్థానముగ రాయాలి. 4ను మనస్సులో ఉంచుకోండి.

మొదటి సంఖ్య 16నకు రెండవ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానము 7ను కలుపగ వచ్చు $16 + 7 = 23$నకు మనస్సులోగల 4 ను కలుపగ వచ్చు $23 + 4 = 27$ను వందలు, పదుల స్థానముగ రాయాలి.

ఇపుడు $16 \times 17 = 272$ అవుతుంది.

ఇట్లే $17 \times 15 = 17 + 5, \quad 7 \times 5 = 220 + 35 = 255$

$16 \times 16 = 16 + 6, \quad 6 \times 6 = 220 + 36 = 256$

$17 \times 13 = 17 + 3, \quad 7 \times 3 = 200 + 21 = 221$

$17 \times 17 = 17 + 7, \quad 7 \times 7 = 240 + 49 = 289$

$18 \times 17 = 18 + 7, \quad 8 \times 7 = 250 + 56 = 306$

ఈ విధముగ సమయస్ఫూర్తిగ ఎక్కాలను గుణించుకోవచ్చును. కంఠస్థము చేయనవసరములేదు.

2. కూడికలతో ఎక్కాలు

వినోదాలతో కూడా ఎక్కాలను లెక్క కట్టుకోవచ్చును. అంకెలను సగము చేయుట, రెట్టింపు చేయుట నేర్చుకొనినచో ఎక్కాలను గుణించుకోవచ్చును. తమాషాను కలిగిస్తుంది. లెక్కలను ప్రారంభదశలో నేర్చుకొనువారికి సగము చేయుట, రెట్టింపు చేయుట, కూడికలు చేయుట కూడ నేర్పవచ్చు. ఎడమవైపున గుణకమును, కుడివైపున గుణ్యమును వాయండి. ఎడమవైపున ఉన్న అంకెలను సగము చేయుచు, శేషములను వదిలివేయుచు, 1 వచ్చు వరకు వాయండి. కుడివైపు అంకెలను రెట్టింపు చేయుచు ఎడమవైపు అంకెలకు ఎదురుగ వాయుచు 1కి ఎదురుగ వచ్చువరకు వాయాలి. ఎడమ వైపున ఉన్న బేసి అంకెలకు ఎదురుగనున్న కుడివైపు అంకెల మొత్తం కూడగ సంఖ్యల లబ్ధము అవుతుంది.

ఉదాహరణకు 4×9 కావలెను అనుకోండి.

4	9
2	18
1	36

ఎడమవైపున బేసి అంకె 1. దీనికి ఎదురుగనున్న 36 అంకెల లబ్ధము అవుతుంది.

ఇట్లే 8×4లు కావలెను అనుకోండి.

8	4
4	8
2	16
1	32

ఎడమవైపునున్న బేసి అంకె 1కి ఎదురుగనున్న 32 అంకెల లబ్ధం అవుతుంది. ఇట్లే సమయస్ఫూర్తిగ ఒక బేసి అంకె అయినచో 1కి ఎదురుగనున్న కుడివైపు లబ్ధము అవుతుంది. ఒక్కొక్కప్పుడు ఎడమవైపున రెండుగాని అంతకంటె ఎక్కువ బేసి సంఖ్యలు వస్తాయి. అపుడు యీ బేసి అంకెలకు ఎదురుగనున్న అంకెల మొత్తము అంకెల లబ్ధము అవుతుంది.

ఉదాహరణకు 7×12లు కావలెను అనుకోండి.

7	12
3	24
1	48

ఎడమవైపున 7, 3, 1 లకు ఎదురుగనున్న అంకెల మొత్తము $12 + 24 + 48 = 84$ సంఖ్యల లబ్ధము అవుతుంది.

ఇట్లే 9×7 కావలెను అనుకోండి.

9	7
4	14
2	28
1	56

ఎడమవైపున బేసి అంకెలు 9, 1 వీటికి ఎదురుగనున్న కుడివైపు అంకెల మొత్తము $7 + 56 = 63$ సంఖ్యల లబ్ధము అవుతుంది.

ఈ పద్ధతిని గుణకారములను కూడ చేయవచ్చును.

3. తీసివేతలతో ఎక్కాలు

తీసివేతల నుపయోగించి 9, 8, 7 ఎక్కాలను అతి తేలికగా నేర్చవచ్చును. ఈ పద్ధతి వింతను ఆసక్తిని కలిగించును. కంఠస్థం చేయనవసరము లేదు.

9వ ఎక్కము

గుణకము నుండి 1ని తీసివేయండి. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. ఈ పదుల స్థానపు అంకెను 9 నుండి తీసివేయండి. ఒకట్ల స్థానపు అంకె వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 4×9లు కావలెను అనుకోండి.

4 నుండి 1ని తీసివేయండి. 3 వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. 3ను 9 నుండి తీసివేయండి. 6 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

ఇపుడు $4 \times 9 = 4 - 1, \quad 9 - 3 = 36$

ఇట్లే $5 \times 9 = 5 - 1, \quad 9 - 4 = 45$

$7 \times 9 = 7 - 1, \quad 9 - 6 = 63$

$9 \times 9 = 9 - 1, \quad 9 - 8 = 81$

ఈ విధముగ 10కి లోపుగల తొమ్మిదుల ఎక్కాలను గ్రహించవచ్చును.

పదికంటే ఎక్కువ తొమ్మిదులు కావలసినపుడు గుణకము నుండి 2ను తీసివేయండి. దానిని పదుల స్థానముగ రాయండి. గుణకములోని ఒకట్ల స్థానమును 10 నుండి తీసివేయండి. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 11×9 కావలెను అనుకోండి. 11 నుండి 2 తీసివేయండి 9 వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. పది నుండి గుణకము 11 లోని ఒకట్ల స్థానము 1ని తీసివేయండి. 9 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. అంకెల లబ్ధము 99 అవుతుంది.

ఇట్లే $13 \times 9 = 13 - 2, \quad 10 - 3 = 117$

$14 \times 9 = 14 - 2, \quad 10 - 4 = 126$

$15 \times 9 = 15 - 2, \quad 10 - 5 = 135$

$17 \times 9 = 17 - 2, \quad 10 - 7 = 153$

ఈ విధముగ సమయస్ఫూర్తిగ ఎక్కాలను గుణించుకోవచ్చును.

8వ ఎక్కము

గుణకము నుండి 1ని తీసివేయండి. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. ఈ పదుల స్థానపు అంకెను 2చే గుణించగ వచ్చు లబ్ధమును 8 నుండి తీసివేయండి. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 3×8లు కావలెను అనుకోండి.

3 నుండి 1ని తీసివేయండి. $3 - 1 = 2$ వస్తుంది. దానిని పదుల స్థానముగ రాయండి.

2ను రెండు రెట్లు చేయగ 4 వస్తుంది. దానిని 8 నుండి తీసివేయగ $8 - 4 = 4$ వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

ఇపుడు $3 \times 8 = 24$ అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ 5×8 కావలెను అనుకోండి.

5 నుండి 1ని తీసివేయండి. $5 - 1 = 4$ వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ వాయండి.

4ను రెండు రెట్లు చేయగ 8 వస్తుంది. దీనిని 8 నుండి తీసివేయగ సున్న వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

ఇపుడు $5 \times 8 = 40$

క్లిష్టసమస్య: 6×8లు కావలెను అనుకోండి.

6 నుండి 1ని తీసివేయండి 5 వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. 50 అవుతుంది. 5ను 2చే గుణించగ 10 వస్తుంది. దీనిని 8 నుండి తీసివేయగ -2 అవుతుంది. 50 నుండి 2ను తీసివేయగ 48 అవుతుంది.

ఇపుడు $6 \times 8 = 48$

ఇట్లే సమయస్ఫూర్తిగ 10 లోపుగల 8వ ఎక్కమును నేర్చుకొనవచ్చును.

పదికంటె ఎక్కువ 8లు కావలెనన్న గుణకము నుండి 3ను తీసివేయండి. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. గుణకము యొక్క ఒకట్ల స్థానపు అంకెను 2చే గుణించగ వచ్చు అంకెను 10 నుండి తీసివేయండి. అపుడు వచ్చు అంకెను ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 12×8లు కావలెను అనుకోండి.

12 నుండి 3ను తీసివేయండి. 9 వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. 12లోని 2ను 2చే గుణించి 10 నుండి తీసివేయండి. 6 వస్తుంది. దానిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. అపుడు అంకెల లబ్ధము 96 అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ 16×8లు కావలెను అనుకోండి.

16 నుండి 3ను తీసివేయండి. 13 వస్తుంది. దీనిని వందలు, పదులు స్థానముగ రాయండి. 16లోని ఒకట్ల స్థానము 6ను 2చే గుణించగ 12 వస్తుంది. దీనిని 10 నుండి తీసివేయగ -2 వస్తుంది. ఇపుడు 130 నుండి 2ను తీసివేయగ 128 వస్తుంది. ఇది లబ్ధము అవుతుంది.

ఇట్లే సమయస్ఫూర్తిగ 8వ ఎక్కమును నేర్చుకొనవచ్చును.

7వ ఎక్కము

గుణకము నుండి 1ని తీసివేయండి. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానపు అంకెను 3చే గుణించి వచ్చిన లబ్ధమును 7 నుండి తీసివేయండి. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 3×7 కావలెను అనుకోండి.

3 నుండి 1ని తీసివేయండి. 2 వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. 2ను 3రెట్లు చేయగ 6 వస్తుంది. దీనిని 7 నుండి తీసివేయండి. $7 - 6 = 1$ వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

ఇపుడు $3 \times 7 = 21$ అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ 5×7 కావలెను అనుకోండి.

5 నుండి 1ని తీసివేయండి. 4 వస్తుంది. దీనిని పదులుగ తలంచండి. 40 అవుతుంది. 4ను 3 రెట్లు చేయండి. 12 అవుతుంది. దీనిని 7 నుండి తీసివేయండి $7 - 12 = -5$ వస్తుంది. దీనిని 40 నుండి తీసివేయగా $40 - 5 = 35$ అవుతుంది.

ఇట్లే సమయస్ఫూర్తిగ 7వ ఎక్కమును 10కి లోపువరకు కనుగొనవచ్చును.

పదికంటె ఎక్కువ ఏడులు కావలసినపుడు గుణకము నుండి 4ను తీసివేయండి. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. గుణకము యొక్క ఒకట్ల స్థానపు అంకెను 3చే గుణించగ వచ్చు అంకెను 10 నుండి తీసివేయండి. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 13×7 కావలెను అనుకోండి.

13 నుండి 4 తీసివేయండి. 9 వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. గుణకము యొక్క ఒకట్ల స్థానపు అంకెను 3ను 3చే గుణించగ వచ్చు 9ని 10 నుండి తీసివేయండి. 1 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

ఇపుడు $13 \times 7 = 91$ అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణకు 18×7 కావలెను అనుకోండి.

18 నుండ 4 ను తీసివేయండి. 14 వస్తుంది. దీనిని వందలు, పదుల స్థానముగ రాయండి. 140 అవుతుంది. గుణకము యొక్క ఒకట్ల స్థానపు అంకె 8ని 3చే గుణించగ 24 వస్తుంది. దీనిని 10 నుండి తీసివేయగ -14 వస్తుంది. దీనిని 140 నుండి తీసివేయగ $140 - 14 = 126$ అవుతుంది.

ఇట్లే $19 \times 7 = 19 - 4, 10 - 27 = 150 - 17 = 133$

$20 \times 7 = 20 - 4, 10 - 30 = 160 - 20 = 140$ అవుతుంది.

ఈ విధముగ 10 కంటె ఎక్కువ ఏడులు కావలసినపుడు సమయస్ఫూర్తిగ గుణించుకోవచ్చును.

4. కూడికలు

పద్ధతి-1: ఎడమవైపు నుండి కుడివైపుకు కూడికలు:

సాధారణముగ కూడికలు కుడినుండి ఎడమకు చేస్తాము. ఈ పద్ధతి వలన మౌఖికముగా కూడలేము. రెండుగాని, మూడుగాని అంకెలుగల సంఖ్యలు తక్కువగ నున్నపుడు ఎడమవైపునుండి కుడివైపునకు చేయుట వలన మొత్తాలను మౌఖికముగ కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణకు 42, 37, 63ల మొత్తం కావలెను అనుకోండి.

మొదట పదుల స్థానము అంకె మొత్తం కనుక్కోండి. $4 + 3 + 6 = 13$ పదుల వస్తాయి. దాని విలువ 130 అవుతుంది. దీనికి ఒకట్ల స్థానపు అంకెల మొత్తం $2 + 7 + 3 = 12$ కలుపగ 142 అవుతుంది. ఈ విధముగ అనుభవము సంపాదించినచో కూడికలను మౌఖికముగ చేయవచ్చును. ఇదే విధముగ 623, 424ల మొత్తం కావలెను అనుకోండి. ఎడమవైపు నుండి కుడివైపుకు కూడగ 1047 వస్తుంది.

పద్ధతి-2: పూర్ణ సంఖ్యకు దగ్గరగనున్న సంఖ్యల కూడికలు:

ఈ పద్ధతిలో సంఖ్యలు ఏ ఏ పూర్ణ సంఖ్యలకు దగ్గరగనున్నదీ కనుక్కోండి. ఆయా పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోండి. తరువాత పూర్ణ సంఖ్యకు ఎంత తక్కువో కనుక్కోండి. దీనిని పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తము నుండి తీసివేయండి.

ఉదాహరణకు 29, 28ల మొత్తం కావలెను అనుకోండి.

ఇవి రెండును 30కి దగ్గరగనున్నవి. కావున రెండు 30లుగ తలంచి మొత్తం కనుగొనగ 60 వస్తుంది. 29, 28లు 30కి వరుసగ 1, 2లు తక్కువ.

వీటి మొత్తం $1 + 2 = 3$ను 60 నుండి తీసివేయండి. 57 వస్తుంది. ఇది సంఖ్యల మొత్తం అవుతుంది.

ఇట్లే 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90లకు దగ్గరగనున్న సంఖ్యల మొత్తాలను కనుగొనవచ్చును.

పద్ధతి-3: మూడు అంకెలుగల సంఖ్యలోని నిలువ వరుసలను ఒకే పర్యాయము కూడవచ్చును. ఈ పద్ధతిలో మొదటి వందల స్థానపు అంకెలను, తరువాత పదుల స్థానపు అంకెలను ఒకట్ల స్థానపు అంకెలను వరుసగ కలపాలి.

ఉదాహరణకు 402, 323, 407, 418ల మొత్తం కావలెను అనుకోండి.

మొదటి మొత్తం $4 + 3 + 4 + 4 = 1500$, తరువాత మొత్తాలు వరుసగ 1525, 1532, 1550.

ఈ విధముగ ప్రయత్నించినచో త్వరితగతిని మొత్తాలను కనుక్కోవచ్చును.

పద్ధతి-4: సంఖ్యలలోని ఒకట్ల స్థానపు అంకెలు 9, 8, 7లు అయినపుడు రెండవ సంఖ్యను పూర్ణ సంఖ్యకు దగ్గరగ మార్చి మొదటి సంఖ్యను కలపాలి. తరువాత హెచ్చించిన సంఖ్యను తీసివేయాలి.

ఉదాహరణకు 94, 98ల మొత్తం కావలెను అనుకోండి.

రెండవ సంఖ్యను 100గ తలంచి కలుపగ $94 + 100 = 194$ అవుతుంది. దీనినుండి హెచ్చించిన 2ను తీసివేయగ 192 అవుతుంది.

ఇట్లే 147, 69ల మొత్తం కావలెను అనుకోండి.

రెండవ సంఖ్యను 70గ తలంచి కలుపగ $147 + 70 = 217$ వస్తుంది. దీని నుండి హెచ్చించిన 1ని తీసివేయగ 216 అవుతుంది. ఇది సంఖ్యల మొత్తం అవుతుంది.

కూడికలు సరిచూచుట: సంఖ్యలను 9చే భాగించునపుడు శేషముల అంకెలను ఒకే అంకె వచ్చు వరకు కూడగ వస్తుంది. ఈ పద్ధతి నుపయోగించి కూడికలను సరిచేయవచ్చును.

ఉదాహరణకు 132, 225ల మొత్తం 357 అనుకోండి.

132లోని అంకెల మొత్తం $1 + 3 + 2 = 6, 225$లోని అంకెల మొత్తం $2 + 2 + 5 = 9$.

6, 9ల మొత్తం $6 + 9 = 15$, $1 + 5 = 6$

357లోని అంకెల మొత్తం $3 + 5 + 7 = 15$, $1 + 5 = 6$.

సంఖ్యలలోని అంకెల మొత్తం, మొత్తంలోని అంకెల మొత్తం సమానము కావున కూడిక నిజము అవుతుందని గ్రహించవచ్చును.

5. తీసివేతలు

పద్ధతి-1: మొదటి సంఖ్యలోని అంకెలు పెద్దవిగనున్నచో ఎడమవైపు నుండి కుడికి తీసివేయవచ్చును. కుడినుండి ఎడమకు తీసివేయ నవసరము లేదు.

ఉదాహరణకు 98, 43ల భేదము 55 అవుతుంది. ఇట్లే 698, 263ల భేదము 435 అవుతుంది.

పద్ధతి-2: పూర్ణసంఖ్యకు దగ్గరగనున్న సంఖ్యలు అయినపుడు రెండవ సంఖ్యను పూర్ణసంఖ్యగా మార్చండి. ఈ పూర్ణ సంఖ్యగ మార్చుటకు ఎంత కలుపవలెనో దానిని మొదటి సంఖ్యకు కలిపి భేదము కనుక్కోండి.

ఉదాహరణకు 69, 47ల భేదము కావలెను అనుకోండి.

రెండవ సంఖ్యను పూర్ణ సంఖ్యగ మార్చగ 50 అవుతుంది. ఇది సంఖ్య కంటె 3 ఎక్కువ కావున యీ 3ను 69కి కలుపగ 72 అవుతుంది. 72, 50లకు భేదము 22 అని వెంటనే గ్రహించవచ్చును.

ఇట్లే 97, 38ల భేదము కావలెను అనుకోండి.

38 అనునది 40కి 2 తక్కువ కావున రెండు సంఖ్యలకు 2 కలుపగ 99, 40లు వస్తాయి. వీటి భేదము 59 అని వెంటనే గ్రహించవచ్చును.

తీసివేతలను సరిచూచుట: కూడికలు వలె తీసివేతలు కూడ సరి చూడవచ్చును.

ఉదాహరణకు 92, 42ల భేదము 43 అనుకోండి.

92 — 92లోని అంకెల మొత్తం $9+2=11$

49 — 49లోని అంకెల మొత్తం $4+9=13, 1+3=4$

43 — వీటి భేదము $11-4=7$, 43లోని అంకెల మొత్తం $4+3=7$

తీసివేయవలసిన సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తముల భేదము, జవాబులోని అంకెల మొత్తం సమానము కావున తీసివేత సరియైనదని గ్రహించవచ్చును.

6. ఏకపంక్తి గుణకారములు

1) రెండు అంకెలుగల సంఖ్యల లబ్ధము కనుగొనునపుడు పదుల స్థానపు అంకెలు ఒకటి అయినపుడు చేయు పద్ధతి:

పదుల స్థానపు అంకెలు 1 అయినపుడు, ఒకట్ల స్థానపు అంకెలను గుణించగ వచ్చు అంకెను లబ్ధములోని ఒకట్ల స్థానముగ తీసికోండి.

మొదటి సంఖ్యకు, రెండవ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానము కలుపగ వచ్చు సంఖ్యను లబ్ధములోని వందలు, పదులుగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 12×13 కావలెను అనుకోండి.

ఒకట్ల స్థానపు అంకెల లబ్ధము $2 \times 3 = 6$ను లబ్ధములోని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

మొదటి సంఖ్యకు 12కు రెండవ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానపు అంకె 3ను కలుపగ 15 వస్తుంది. దీనిని లబ్ధములోని వందలు, పదులు స్థానముగ రాయండి.

ఇపుడు $12 \times 13 = 156$ అవుతుంది.

ఇట్లే $12 \times 14 = 12 + 4, \quad 2 \times 4 = 168$
$13 \times 13 = 13 + 3, \quad 3 \times 3 = 169$
$11 \times 12 = 11 + 2, \quad 1 \times 2 = 132$
$15 \times 11 = 15 + 1, \quad 5 \times 1 = 165$

క్లిష్టసమస్య: 13×15 కావలెను అనుకోండి.

ఒకట్ల స్థానపు అంకెల లబ్ధము $3 \times 5 = 15$ అవుతుంది. దీనిలో ఒకట్ల స్థానమును లబ్ధములోని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానమును మనస్సు నందుంచుకోండి.

మొదటి సంఖ్య 13కు రెండవ సంఖ్యలోని 5 కలుపగ 18 అవుతుంది. దీనికి మనస్సులోని 1 కలుపగ 19 అవుతుంది. దీనిని వందలు పదుల స్థానముగ రాయండి. $13 \times 15 = 195$ అవుతుంది.

ఇట్లే $13 \times 15 = 13 + 5, \quad 3 \times 5 = 180 + 15 = 195$
$15 \times 12 = 15 + 2, \quad 2 \times 5 = 170 + 10 = 180$
$13 \times 19 = 13 + 9, \quad 3 \times 9 = 220 + 27 = 247$
$17 \times 14 = 17 + 4, \quad 7 \times 4 = 210 + 28 = 238$

2) పదుల స్థానపు అంకెలు సమానముగ నున్నపుడు రెండు అంకెల గుణకారములు:

రెండవ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానమును మొదటి సంఖ్యకు కలిపి సమానముగానున్న పదుల స్థానపు అంకెతో గుణించి అన్ని పదులుగ తీసికోండి. ఒకట్ల స్థానపు అంకెలను గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను కనుగొని పై సంఖ్యకు కలపండి. ఇపుడు సంఖ్యల లబ్ధము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 23×21 కావలెను అనుకోండి.

వీనిలో పదుల స్థానపు అంకెలు సమానము. మొదటిసంఖ్యకు రెండవ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానమును కలిపి 2చే గుణించగ $(23+1)2 = 48$ వస్తుంది. దీనిని పదులుగ తీసికొనగ 480 అవుతుంది. దీనికి ఒకట్ల స్థానపు అంకెలు 3, 1 లను గుణించగా వచ్చు $3 \times 1 = 3$ను కలుపగ అంకె లబ్ధము $480 + 3 = 483$ అవుతుంది.

ఇట్లే $32 \times 33 = (32+3) \times 3, 2 \times 3 = 1050 + 6 = 1056$

$42 \times 49 = (42+9) \times 4, 2 \times 18 = 2040 + 36 = 2076$

$52 \times 53 = (52+3) \times 5, 2 \times 3 = 2750 + 6 = 2756$

$63 \times 64 = (63+4) \times 6, 3 \times 4 = 4020 + 12 = 4032$

$73 \times 71 = (73+1) \times 7, 3 \times 1 = 5180 + 3 = 5183$

$85 \times 83 = (85+3) \times 8, 5 \times 3 = 7040 + 15 = 7055$

$91 \times 92 = (91+2) \times 9, 1 \times 2 = 8370 + 2 = 8372$

3) ఒకట్లస్థానపు అంకెలు సమానముగ నున్నపుడు రెండు అంకెల గుణకారములు:

రెండు సంఖ్యలలోని పదుల స్థానపు అంకెలు గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను వందలుగ తీసుకోండి.

పదుల స్థానపు అంకెలను కూడగ వచ్చు సంఖ్యను సమానముగనున్న ఒకట్ల స్థానపు అంకెతో గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను అన్నీ పదులుగ తీసుకోండి.

ఒకట్ల స్థానపు అంకెలకు గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను అన్నీ ఒకట్లుగ తీసికోండి.

ఉదాహరణకు 36×26 కావలెను అనుకోండి.

రెండు సంఖ్యలలోనీ ఒకట్ల స్థానపు అంకెలు సమానము.

పదుల స్థానపు అంకెలు 3, 2 లను గుణించగ 6 వస్తుంది. దీనిని వందలుగ తలంచగ 600 అవుతుంది.

పదుల స్థానపు అంకెలను కలుపగ వచ్చు $3+2=5$ ను ఒకట్ల స్థానపు అంకెతో గుణించగ వచ్చు $5\times 6=30$ ని అన్ని పదులుగ రాయగ 300 అవుతుంది.

ఒకట్ల స్థానపు అంకెలను గుణించగ వచ్చు $6\times 6=36$ ని ఒకట్లుగ తలంచగ 36 అవుతుంది.

ఇపుడు $36\times 26=600+300+36=936$ అవుతుంది.

ఇట్లే
$$\begin{aligned}47\times 37 &= (4\times 3)\times 100+[(4+3)\times 7]\times 10+7\times 7\\ &= 1200+490+49=1739\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}56\times 26 &= (5\times 2)\times 100+[(5+2)\times 6]\times 10+6\times 6\\ &= 1000+420+36=1456\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}62\times 42 &= (6\times 4)\times 100+[(6+4)\times 2]\times 10+2\times 2\\ &= 2400+200+4=2604\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}96\times 46 &= (9\times 4)\times 100+[(9+4)\times 6]\times 10+6\times 6\\ &= 3600+780+36=4416\end{aligned}$$

ఈ విధముగ ఒకట్ల స్థానపు విలువలు సమానముగ నున్నపుడు లెక్క కట్టుకోవచ్చును.

4) ఒకట్ల స్థానపు అంకెల మొత్తం 10 అయియుండి, పదులస్థానపు అంకెలు సమానముగ నున్నప్పుడు రెండు అంకెల గుణకారములు:

ఒకట్ల స్థానపు అంకెను గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను పదుల, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానపు అంకెకు తరువాతనున్న సహజ సంఖ్యతో గుణించగవచ్చు సంఖ్యను పదుల స్థానపు సంఖ్యకు ముందు రాయండి.

ఉదాహరణకు 22×28 కావలెను అనుకోండి.

దీనిలో ఒకట్ల స్థానపు అంకెను గుణించగ $2\times 8=16$ వస్తుంది. దీనిని పదులు, ఒకట్లుగ రాయండి.

పదుల స్థానపు అంకె 2కు తరువాత సహజ సంఖ్య 3తో గుణించగ వచ్చు $2\times 3=6$ను పదుల స్థానమునకు ముందు రాయండి.

ఇపుడు $22\times 28=616$ అవుతుంది.

ఇట్లే
$65\times 65=6\times 7,\quad 5\times 5=4225$
$68\times 62=6\times 7,\quad 8\times 2=4216$
$71\times 79=7\times 8,\quad 1\times 9=5609$
$83\times 87=8\times 9,\quad 3\times 7=7221$

$$94 \times 96 = 9 \times 10, \quad 4 \times 6 = 9024$$
$$114 \times 116 = 11 \times 12, \quad 4 \times 6 = 13224$$

ఇట్లే ఒకట్ల స్థానపు అంకెల మొత్తం పది అయివుండి, ఒకట్ల స్థానపు అంకెలకు ముందున్న సంఖ్యలు సమానము అయినపుడు సంఖ్యల లబ్ధము కనుక్కోవచ్చును.

5) అంకెలు ఏమయినప్పటికి రెండు అంకెలు గల సంఖ్యల లబ్ధమును కనుగొనుట:

దీనిని బీజగణితమువలన కింది విధముగ వివరించవచ్చును:

$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + x(ad + bc) + bd$

మొదటి సంఖ్యలోని అంకెలు a, b రెండవ సంఖ్యలోని అంకెలు c, dలు తలంచినచో b, dల లబ్ధము ఒకట్ల స్థానమగును.

అంతముల లబ్ధము, మధ్యముల లబ్ధము కనుగొని కలుపగవచ్చు సంఖ్యల మొత్తం పదులుగ తీసుకోండి. a, cల లబ్ధము వందలు అగును.

ఉదాహరణకు 62×53 కావలెను అనుకోండి.

ఒకట్ల స్థానపు అంకెల లబ్ధము $2 \times 3 = 6$ను ఒకట్లుగ తీసికోండి. అంత్యముల లబ్ధము. మధ్యముల లబ్ధము కనుగొని కలుపగ వచ్చు $6 \times 3 + 2 \times 5 = 18 + 10 = 28$లోని 8ని పదులుగ రాసి 2ను మనస్సులో వుంచుకోండి.

పదుల స్థానపు అంకెల లబ్ధము $6 \times 5 = 30$కి మనస్సులో గల 2ను కలుపగ 32 అవుతుంది. దీనిని పదుల స్థానమునకు ముందు రాయండి.

ఇపుడు $62 \times 53 = 3286$

ఇట్లే $45 \times 71 = 4 \times 7, (4 \times 1 + 5 \times 7), 5 \times 1 = 3195$

$92 \times 25 = 2300$

7. గుర్తుల గుణకారములు-1

ఈ గుణకారములను చేయుటకు | × | అను గుర్తులను వాడుతాము. గుర్తులను కుడి నుండి ఎడమకు వాడాలి.

ఒకట్ల స్థానమును వచ్చుటకు మొదట నిలువు గుర్తు వాడాలి. పదల స్థానము వచ్చుటకు అడ్డగుణకారము చేయాలి. వందల స్థానము వచ్చుటకు నిలువు గుణకారము చేయాలి.

ఉదాహరణకు 21×43 కావలెను అనుకోండి.

$$\begin{array}{r} 21 \\ 43 \\ \hline 903 \\ \hline \end{array}$$

మొదటి గుర్తును అనుసరించి నిలువు గుణకారము చేయగ $1 \times 3 = 3$ వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయాలి. రెండు అంకెలు గల సంఖ్య వచ్చినచో పదుల స్థానమును మనస్సునందుంచుకోవాలి. రెండవ గుర్తును అనుసరించి అడ్డ గుణకారము చేసి కలుపగ $2 \times 3 + 4 \times 1 = 10$ వస్తుంది. దీనిలో 0ను పదులుగ రాయాలి. 1ని మనస్సు నందుంచుకోండి. మూడవ గుర్తు ననుసరించి నిలువు గుణకారము చేయగ $2 \times 4 = 8$ వస్తుంది. దీనికి మనస్సునందుగల 1ని కలుపగ 9 వస్తుంది. దీనిని వందలుగ తలంచండి.

ఇట్లే 1) $\begin{array}{r} 45 \\ 71 \\ \hline 3195 \\ \hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 63 \\ 45 \\ \hline 2835 \\ \hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 12 \\ 18 \\ \hline 216 \\ \hline \end{array}$

8.గుర్తుల గుణకారములు-2

మూడు అంకెలుగల సంఖ్య గుణకారము:

ఈ గుణకారము చేయుటకు | × * × | గుర్తులు కుడినుండి ఎడమకు వాడుతాము.

మొదటి గుర్తు ఒకట్ల స్థానముల నిలువు గుణకారము.

రెండవ గుర్తు ఒకట్ల పదుల స్థానముల అడ్డ గుణకారము.

మూడవ గుర్తు ఒకట్ల, పదుల, వందల స్థానముల అడ్డ గుణకారము నిలువు గుణకారమును చూపును.

నాల్గవ గుర్తు వందల, పదుల అడ్డ గుణకారము చూపును.

ఐదవ గుర్తు వందల స్థానముల నిలువు గుణకారమును చూపును.

ఉదాహరణకు 512×413 కావలెను అనుకోండి.

$$\begin{array}{r} 512 \\ 413 \\ \hline 211456 \\ \hline \end{array}$$

మొదటి గుర్తును అనుసరించి ఒకట్ల స్థానము $2 \times 3 = 6$. రెండవ గుర్తును అనుసరించి అడ్డ గుణకారముచేసి కలుపగ $1 \times 3 + 1 \times 2 = 5$ వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానముగ రాయండి. మూడవ గుర్తును అనుసరించి అడ్డ గుణకారము, నిలువు గుణకారముచేసి కలుపగ $5 \times 3 + 4 \times 2 + 1 \times 1 = 15 + 8 + 1 = 24$ వస్తుంది. దీనిలోని 4ను వందలుగ రాయండి. 2ను మనస్సునందుంచుకోండి. నాల్గవ గుర్తును అనుసరించి అడ్డ గుణకారము చేసి కలుపగ $5 \times 1 + 4 \times 1 = 9$ వస్తుంది. దీనికి మనస్సులోగల 2ను కలుపగ $9 + 2 = 11$ వస్తుంది. దీనిలోని ఒకట్ల స్థానము 1ని వేల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానమును మనస్సునందుంచుకోండి. ఐదవ గుర్తును అనుసరించి నిలువు గుణకారము చేయగ $5 \times 4 = 20$ వస్తుంది. దీనికి మనస్సునందుగల 1ని కలుపగ 21 వస్తుంది. దీనిని వేల స్థానమునకు ముందు వాయండి.

యిట్లే	1)		2)		3)	
		632		742		123
		421		132		321
		2,66,072		97,944		39,483

3 అంకెలు గల సంఖ్యల లబ్ధమును బీజగణిత పద్ధతిని కనుగొనుట:

దీనియందు ఇమిడియున్న సూత్రమును కింది విధముగ వివరించవచ్చు.

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + cx + f) = adx^4 + x^3(ae + bd) +$$
$$x^2(af + be + cd) + x(bf + ce) + cf$$

మొదటి సంఖ్యలోని 3 అంకెలు a, b, cలుగను, 2వ సంఖ్యలోని 3 అంకెలు d, e, fలుగను తీసికొనినచో పై సూత్రము ననుసరించి లబ్ధము కనుగొనవచ్చును.

ఒకట్ల స్థానపు అంకె వచ్చుటకు ఒకట్ల స్థానమును గుణించగ వస్తుంది. పదుల స్థానము వచ్చుటకు ఒకట్ల, పదుల స్థానపు అంకెలను అడ్డ గుణకారము చేయగ వస్తుంది. వందల స్థానపు అంకె వచ్చుటకు వందల, పదుల, ఒకట్ల స్థానపు అంకెలను అడ్డ గుణకారము, నిలువు గుణకారము చేయగ వస్తుంది. వేల స్థానము వచ్చుటకు వందల, పదుల స్థానపు అంకెలను అడ్డ గుణకారము చేయగ వస్తుంది. పదివేల స్థానము వచ్చుటకు వందల స్థానమును గుణించగ వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 123×321 కావలెను అనుకోండి.

```
  123
  321
-----
39483
```

ఒకట్ల స్థానపు అంకె వచ్చుటకు ఒకట్ల స్థానములను గుణించగ వచ్చు $3 \times 1 = 3$ను ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

పదుల స్థానపు అంకె వచ్చుటకు ఒకట్ల పదుల స్థానపు అంకెలను అడ్డ గుణకారముచేసి కలుపగ $2 \times 1 + 2 \times 3 = 8$ వస్తుంది.

వందల స్థానపు అంకె వచ్చుటకు వందల, పదుల, ఒకట్ల స్థానపు అంకెలను అడ్డ గుణకారము, నిలువు గుణకారము చేయగ $1 \times 1 + 3 \times 3 + 2 \times 2 = 1 + 9 + 4 = 14$ వస్తుంది. దీనిలోని 4ను వందల స్థానముగ రాసి 1ని మనస్సునందుంచుకోండి.

వేల స్థానము వచ్చుటకు పదుల, వందల స్థానపు అంకెలను అడ్డ గుణకారము చేసి కలుపగ $1 \times 2 + 3 \times 2 = 8$ వస్తుంది. దీనికి మనస్సు నందుగల 1ని కలుపగ $8 + 1 = 9$ అవుతుంది. దీనిని 9ని వేల స్థానముగ రాయాలి.

పదివేల స్థానము వచ్చుటకు వందల స్థానపు అంకెలను గుణించగ $1 \times 3 = 3$ వస్తుంది. దీనిని పదివేల స్థానముగ రాయండి.

ఇట్లే 1) 532×472 2) 785×362

$$\begin{array}{r} 532 \\ 472 \\ \hline 251104 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 785 \\ 362 \\ \hline 284170 \\ \hline \end{array}$$

ఒక సంఖ్యలో మూడు అంకెలుండి రెండవ సంఖ్యలో రెండు అంకెలున్న ఎడల వందల స్థానపు అంకె బదులు సున్న రాయాలి.

ఉదాహరణకు 123×89, 135×62

$$\begin{array}{r} 123 \\ 089 \\ \hline 10947 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 135 \\ 062 \\ \hline 8370 \\ \hline \end{array}$$

9. ఈజిప్టుదేశ గుణకార పద్ధతులు

1) సాధారణముగ గుణకారములను చేయుటకు ఎక్కాలను వాడుతాము. కాని ఈజిప్టు దేశస్థులు ఎక్కాలను వాడుకుండగనే లబ్ధములను కనుగొను పద్ధతిని వాడెడివారట ఈ పద్ధతికి చెందినవి మూడు రకములు. ఏ సంఖ్యనైనను 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64..... మొదలగు సంఖ్యలను వాడి

తయారు చేయవచ్చును. వీటినుపయోగించి లబ్ధములను కనుగొనెడివారు మొదటి నిలువ వరుసలో యీ అంకెలు రాయండి. వీటికి ఎదురుగా గుణించవలసిన సంఖ్యను రెట్టింపు చేయుచు రాయాలి. ఏ అంకెల మొత్తము గుణకము అవుతుందో ఆయా అంకెలకు ఎదురుగనున్న సంఖ్యల మొత్తం లబ్ధము అవుతుంది.

ఉదాహరణకు 35×212 కావలెను అనుకోండి.

1	212
2	424
4	848
8	1696
16	3392
32	6784

35 వచ్చుటకు 1, 2, 32లు కలుపగ వస్తుంది. కావున 1, 2, 32లకు ఎదురుగనున్న సంఖ్యలను కూడగ లబ్ధము అవుతుంది.

$$35 \times 212 = \begin{array}{r} 6784 \\ 424 \\ 212 \\ \hline 7420 \\ \hline \end{array}$$

ఇట్లే 21×25 కావలెను అనుకోండి.

1	25
2	50
4	100
8	200
16	400

21 వచ్చుటకు 1, 4, 16 కలపాలి. కావున వాటికి ఎదురుగనున్న సంఖ్యల మొత్తం లబ్ధము అవుతుంది.

$$21 \times 25 = 25 + 100 + 400 = 525$$

2) ఈజిప్టు దేశస్థులు వాడు మరియొక పద్ధతి ప్రకారము సంఖ్యను సగము చేయుట రెట్టింపు చేయుటవలన గుణకారములను చేయవచ్చును. గుణించు సంఖ్యను ఎడమవైపునను గుణించవలసిన సంఖ్యను కుడివైపునను రాయాలి. ఎడమవైపు సంఖ్యను సగము చేయుచు శేషములను వదిలివేయుచు 1 వచ్చు వరకు రాయాలి. కుడివైపు సంఖ్యలను రెట్టింపు చేయుచు 1కి

ఎదురుగ వచ్చు వరకు రాయాలి. ఎడమవైపునున్న బేసి అంకెలకు ఎదురుగ నున్న కుడివైపు అంకెలను కూడగ లబ్ధము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 21×4 కావలెను అనుకోండి.

21	42
10	84
5	168
2	336
1	672

ఎడమవైపునున్న బేసి అంకెలు 1, 5, 21లకు ఎదురుగనున్న కుడివైపు అంకెలు కూడగ $42 + 168 + 672 = 882$ వస్తుంది. ఇది సంఖ్యల లబ్ధము అవుతుంది.

3) ఈజిప్టు దేశములో మరియొక పద్ధతికూడా వాడుకలో నుండెడిది. ఈ పద్ధతిలో గుణకమును ఒక కాగితముపై రాసి. గుణ్యములోని అంకెలను తయారుచేసి సంఖ్యగ తలంచాలి. తారుమారు చేసిన సంఖ్యలోని పదుల స్థానమును గుణకములోని ఒకట్ల స్థానమునకు కిందగ తలంచి గుణించి అన్ని ఒకట్లుగ తీసికోండి. తరువాత పదుల స్థానమునకు కిందగ పదుల స్థానమును ఒకట్ల స్థానమునకు కిందగ ఒకట్ల స్థానమును వుంచి ఎదురెదురుగనుండు అంకెలను గుణించగ వచ్చు సంఖ్యలను కలపగ వచ్చు సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానమును లబ్ధములోని పదులుగ రాయండి. పదుల స్థానమును మనస్సునందుంచుకోండి. గుణ్యములోని ఒకట్ల స్థానమును గుణకములోని పదుల స్థానమునకు కిందగ జరిపి ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించగ వచ్చు సంఖ్యకు మనస్సునందుగల అంకెను కలిపి లబ్ధములోని పదుల స్థానమునకు ముందు రాయండి. ఇపుడు సంఖ్యల లబ్ధము అవుతుంది. ఈ పై పద్ధతిని చేయుటవలన గుర్తుల గుణకారములోని అడ్డ గుణకారము చేయనవసరము లేదు.

ఉదాహరణకు 31×23 కావలెను అనుకోండి.

ఒక కాగితముపై 31ని రాయండి. 23ను 32గ తలంచి మొదట 3ను 1 కిందగ నుండునట్లుగను, తరువాత 31 కిందగ 32 వుండునట్లుగను, తరువాత 3నకు కిందగ 2 వుండునట్లుగను తలంచి ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించి ఒకట్లు, పదులు, వందలు, వేల స్థానములుగ రాయండి.

31	31	31
32	32	32
3	11	6

$\therefore 31 \times 23 = 713$

1కి కిందుగ 3ను రాసి గుణించగ 3 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. 31కి కిందుగ 32 రాసి ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించి కలుపగ $3 \times 3 + 1 \times 2 = 11$ వస్తుంది. దీనిలోని ఒకట్ల స్థానపు 1ని పదులుగ రాయండి. పదుల స్థానపు 1ని మనస్సునందుంచుకోండి తరువాత 3నకు కిందగ 2 వచ్చునట్లు జరిపి గుణించగ వచ్చు $3 \times 2 = 6$నకు మనస్సునందుగల 1ని కలుపగ 7 వస్తుంది. దీనిని వందలుగ తీసికోండి.

ఇట్లే 37×52 కావలెను అనుకోండి.

సంఖ్యలను కింద విధముగ తలంచి గుణించండి.

37	37	37
25	25	25

రెండవ సంఖ్యలోని అంకెలను తారుమారు చేయగ 25 వస్తుంది. దీనిలోని 2ను 7నకు కిందగ తలంచి గుణించగ 14 వస్తుంది. దీనిలోని 4ను లబ్ధములోని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానమును మనస్సునందుంచుకోండి.

37నకు కిందగ 25ను రాసి ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించగ వచ్చు సంఖ్యలను కలుపగ $3 \times 2 + 7 \times 5 = 41$ వస్తుంది. దీనికి మనస్సులో గల 1ని కలుపగ 42 అవుతుంది. దీనిలోని 2ను లబ్ధములోని పదులుగ తీసికోండి. 4ను మనస్సునందుంచుకోండి.

3నకు కిందగ 5ను రాసె ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించగ వచ్చు $3 \times 5 = 15$నకు మనస్సు నందుగల 4ను కలుపగ 19 వస్తుంది. దీనిని లబ్ధములోని వేలు, వందలు స్థానముగ తీసికోండి.

ఇపుడు $37 \times 52 = 1924$ అవుతుంది.

మరియొక ఉదాహరణకు 21×32 తీసికోండి. అంకెలను కింది విధముగ తలంచండి.

21	21	21
23	23	23
2	7	6

ఇపుడు $21 \times 32 = 672$ అవుతుంది.

4) పై ఈజిప్టు దేశ పద్ధతి ననుసరించి మూడు అంకెల గుణకారము కూడ చేయవచ్చును. మొదటి సంఖ్యను ఒక కాగితముపై రాయండి. రెండవ సంఖ్యలోని అంకెలను తారుమారుచేసి ఒక కాగితము ముక్కపై రాసి

కింద చూపినట్లుగ కాగితమును జరుపుచు ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించుచు ఒకట్లు, పదులు, వందలు, వేలు, పదివేలుగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 212×321 కావలెను అనుకోండి.

ఒక కాగితముపై 212ని రాయండి. రెండవ సంఖ్యను 123గ తలంచి ఒక కాగితపు ముక్కపై రాసి కింద చూపిన విధముగ జరుపుచు ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించుచు లబ్ధములను కనుక్కోండి.

1)	2)	3)	4)	5)
212	212	212	212	212
123	123	123	123	123

2నకు కిందగనున్న 1 తలంచి గుణించగవచ్చు. $2 \times 1 = 2$ను లబ్ధములోని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

1, 2లకు కిందగ 1, 2లను తలంచి ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించి కలుపగ $1 \times 1 + 2 \times 2 = 5$ వస్తుంది. దీనిని లబ్ధములోని పదుల స్థానముగ రాయండి.

2, 1, 2లకు కిందుగ 1, 2, 3లను తలంచి ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించి కలుపగ $2 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 = 10$ వస్తుంది. దీనిలోని 0ను లబ్ధములోని వందల స్థానముగ రాయండి. 1ని మనస్సునందుంచుకోండి.

2, 1లకు కిందగ 2, 3లను తలంచి ఎదురు ఎదురుగనున్న అంకెలను గుణించి కలుపగ $2 \times 2 + 1 \times 3 = 7$ వస్తుంది. దీనికి మనస్సునందుగల 1 కలుపగ 8 వస్తుంది. దీనిని వేల స్థానముగ రాయండి.

2నకు కిందుగ 3 రాసి గుణించగ వచ్చు 6ను పదివేలుగ రాయండి.

ఇపుడు $212 \times 321 = 68052$ అవుతుంది.

10.భారతదేశపు గుణకార పద్ధతులు

పద్ధతి 1: వాడుకలోనున్న గుణకార పద్ధతి: ఈ పద్ధతిలో గుణించవలసిన సంఖ్యకు కిందుగ గుణించు సంఖ్యను రాయాలి. ఒక్కొక్క అంకెతో గుణకారము చేయుచు ప్రతి పర్యాయము ఒక పదము ఎడమ పక్కగ ఆరంభించి సంఖ్యలను రాయవలెను. సంఖ్యలను కూడగ లబ్ధము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 42×34 కావలెను అనుకోండి.

42 34 168 126 1428	4చే ముందు గుణించి రాయవలెను. తరువాత 3చే గుణించి ఒక అంకె ఎడమ పక్కగ ఆరంభించి సంఖ్యను రాసి కూడగ లబ్ధము వస్తుంది. ఇట్లే ఎన్ని అంకెల గుణకారము అయినను ప్రతి పర్యాయము ఒక పదము ఎడమ పక్కగ ఆరంభించి సంఖ్యలను రాసి కలుపగ లబ్ధము వస్తుంది.

పద్ధతి 2: లబ్ధములను ఒకదాని కింద ఒకటి వేయు పద్ధతి. ఈ పద్ధతిలో వరుసగ అంకెలతో గుణించుచు లబ్ధమును ఒక పదము పక్కగ రాయనవసరము లేదు. మొదటి సంఖ్యను రెండవ సంఖ్యను విలోమము చూపిన సంఖ్యతో కింద చేసిన విధముగ గుణించాలి.

ఉదాహరణకు 42×34 కావలెను అనుకోండి.

42	
168	4
126	3

మొదట 4 చే గుణించి లబ్ధము 168 రాయుండి. తరువాత 3చే గుణించి లబ్ధము 126ను కింద రాయండి. ఇపుడు లబ్ధములోని సంఖ్యలు వచ్చుటకు కర్ణములోని అంకెలను ఏటవాలుగ పైనుండి కూడగ వస్తుంది.

ఒకట్ల స్థానపు అంకె = 8

పదుల స్థానపు అంకె వచ్చుటకు $6 + 6 = 12$లోని 2ను పదులుగ తీసికోండి. 1ని మనస్సునందుంచుకోండి. వందల స్థానపు అంకె వచ్చుటకు $1 + 2 = 3$నకు మనస్సులోగల 1ని కలుపగ 4 అవుతుంది. వేల స్థానపు అంకె 1 అవుతుంది.

ఇపుడు $42 \times 34 = 1428$

ఇట్లే 237×432 కావలెను అనుకోండి.

2 3 7	
4 7 4	2
7 1 1	3
9 4 8	4

432ను 234గ తలంచి నిలువు వరుసగ రాయాలి 2, 3, 4లచే వరుసగ గుణించి రాయాలి.

లబ్ధము వచ్చుటకు కర్ణములోని అంకెలను కూడగ వస్తుంది.

ఒకట్ల స్థానపు అంకె = 4, పదుల స్థానపు అంకె $7+1 = 8$ వందల స్థానపు అంకె వచ్చుటకు $4+1+8 = 13$లో 3 ను రాసి 1ని మనస్సునందుంచుకోండి.

వేల స్థానపు అంకె వచ్చుటకు $7+4=11$నకు మనస్సులో గల 1ని కలుపగ వచ్చు 12లోని 2ను రాసి 1ని మనస్సునందుంచుకోండి.

పదివేల స్థానము వచ్చుటకు 9కి మనస్సులో గల 1 కలుపగ వచ్చు 10ని వేల స్థానమునకు ముందు రాయండి.

ఇపుడు $237 \times 432 = 102384$

పద్ధతి 3: ఎక్కువ ఎక్కాల వరకు కంఠస్థం వచ్చినచో గుణకారములను తక్కువ వరుసలలోనే చేయవచ్చును. ఈ పద్ధతులు వాడుకలో లేకపోయినను కొంచెము అనుభవము సంపాదించినచో అతి తొందరలో చేయవచ్చును.

ఈ పద్ధతిలో గుణించవలసిన సంఖ్యను గుణించు సంఖ్యకు కిందగ రాయాలి. గుణించు సంఖ్యలోని అంకెలను వరుసగ తీసికొని గుణించవలసిన సంఖ్యలోని అంకెలను రెండు భాగములుగ చేసి మొదటి భాగమును గుణించి వేయాలి. తరువాత రెండవ భాగమును యిదే విధముగ గుణించి రెండు స్థానములు పక్కగ రాసి కలపాలి.

ఉదాహరణకు 2432×1612 కావలెను అనుకోండి.

$$\begin{array}{r} 2\;4\;3\;2 \\ 1\;6\;1\;2 \\ \hline 2\;9\;1\;8\;4 \\ 3\;8\;9\;1\;2 \\ \hline 3\;9\;2\;0\;3\;8\;4 \end{array}$$

1612ను 16, 12లుగ విభజించండి. మొదటి సంఖ్య 2432లోని అంకెలతో వరుసగ 12ను గుణించి మొదటి వరుసలో రాయండి. తరువాత 2432లోని అంకెలతో వరుసగ 16ను గుణించి రెండు స్థానములను వదలివేసి ఎడమవైపుగ రాసి కలుపగ లబ్ధము వస్తుంది.

12ను 2, 3, 4, 2తో గుణించగ 29184 వస్తుంది. తరువాత 16ను 2, 3, 4, 2తో గుణించగ 38912 వస్తుంది. పైన చూపిన విధముగ కూడగ 3920384 అవుతుంది.

11. వేదగణిత మౌఖిక గుణకార పద్ధతులు

వేదములోని కొన్ని సరళ సూత్రములనుపయోగించి మౌఖికముగ గుణకారములను చేయవచ్చును. ఈ పద్ధతిలో దగ్గరనున్న పూర్ణ సంఖ్యల ఆధారముగ

తీసికొంటాము. అనగా 10కి దగ్గర వున్నపుడు రెండు సంఖ్యలు కలిపి పది నుండి తీసివేయగ వచ్చు సంఖ్యను పదులుగా తీసికొంటాము. సంఖ్యలు పదికి గల తేడాలను తెలిసికొని గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను ఒకట్లుగ తీసికొంటాము. దీనిని బీజగణితమును ఉపయోగించుచు యీ కింది విధముగ వివరించవచ్చును. ఈ పద్ధతులు అధ్యయనము చేయుటకు 5×5 ఎక్కాలు వచ్చిన చాలును.

$$(x-a)(x-b) = x(x-a-b) + ab$$

10కి దగ్గఉనున్న సంఖ్యల లబ్ధము కనుగొనుట

రెండు అంకెలు 10కి దగ్గరనున్నపుడు రెండు అంకెలను 10 నుండి తీసివేయగ వచ్చిన సంఖ్యల లబ్ధము ఒకట్లుగ రాయండి. రెండు సంఖ్యలను కలిపి 10ని తీసివేసి అన్ని పదులుగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 9×9 కావలెను అనుకోండి.

రెండు అంకెలు 10కి దగ్గరగ నున్నవి. 10 నుండి వరుసగ తీసివేయగ 1, 1 లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము $1 \times 1 = 1$ని ఒకట్ల స్థానముగ రాయాలి.

రెండు అంకెలను కలిపి 10ని తీసివేయగ $9 + 9 - 10 = 8$ వస్తుంది. దీనిని ఒకట్లు స్థానముగ రాయుండి.

ఇపుడు $9 \times 9 = 81$ అవుతుంది.

ఇపుడు
$$\begin{aligned} 9 \times 8 &= (9+8-10),(10-9)(10-8) \\ &= 72 \\ 7 \times 9 &= (7+9-10),(10-7)(10-9) \\ &= 63 \end{aligned}$$

మరియొక ఉదాహరణకు 7×6లు కావలెను అనుకోండి.

7, 6లను కలిపి 10 తీసివేయగ $7 + 6 - 10 = 3$ వస్తుంది. దీనిని వందలుగ తలంచగ 30 అవుతుంది.

7, 6లను పది నుండి వరుసగ తీసివేయగ 3, 4లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము $3 \times 4 = 12$ వస్తుంది. దీనిని 30కి కలుపగ అంకెల లబ్ధము $30 + 12 = 42$ అవుతుంది.

ఇట్లే
$$\begin{aligned} 6 \times 6 &= (6+6-10),(10-6)(10-6) \\ &\quad 20 + 16 = 36 \\ 12 \times 13 &= (12+13-10),(12-10)(13-10) \\ &= 156 \end{aligned}$$

$$13 \times 13 = (13 + 13 - 10), (13 - 10)(13 - 10)$$
$$= 169$$

ఒక అంకె పదిలోపు మరియొకటి 10 కంటె ఎక్కువ అయినను యిదే పద్ధతిని చేయవచ్చును.

ఉదాహరణకు 9×12 కావలెను అనుకోండి.

$$9 \times 12 = (9 + 12 - 10), (10 - 9)(10 - 12)$$
$$= 11, 1 \times -2$$
$$110 - 2 = 108$$

ఇట్లే సమయస్ఫూర్తిగా ఎక్కాలను గుణించుకోవచ్చును.

20కి దగ్గఱనున్న సంఖ్యల లబ్ధము కనుగొనుట

వివరణ:

20 దగ్గఱనున్న అంకెలను 20 నుండి తీసివేయండి. వీటి లబ్ధమును ఒకట్ల స్థానముగ వ్రాయండి.

రెండు సంఖ్యలను కలిపి 20ని తీసివేయండి. దీనిని 2చే గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను వందలు పదుల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ–1: 19×19 కావలెను అనుకోండి. ఇవి రెండును 20కి దగ్గఱగనున్నవి. వీటిని 20 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 1, 1 వస్తాయి. వీటి లబ్ధము $1 \times 1 = 1$ని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

రెండు సంఖ్యలను కలిపి $(19 + 19 = 38)$ 20ని తీసివేయండి. 18 వస్తుంది. దీనిని 2 చే గుణించగ వచ్చు 36ను వందలు, పదుల స్థానముగ రాయండి. లబ్ధము 361 అవుతుంది.

ఉదాహరణ–2: 23×21ల విలువ కావలెను అనుకోండి. వీటిని 20 నుండి తీసివేయగ వరుసగ $-3, -1$లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 3 అవుతుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

అంకెలను కలపగ వచ్చు $(23 + 21 = 44)$ నుండి 20ని తీసివేయండి. 24 వస్తుంది. దీనిని 2చే గుణించగ వచ్చు 48ని వందలు, పదుల స్థానముగ రాయండి. ఇపుడు సంఖ్యల లబ్ధము 483 అవుతుంది.

మరొక క్లిష్టమైన ఉదాహరణ: 19×23ల విలువ కావలెను అనుకోండి. వీటిని 20 నుండి తీసివేయగ వరుసగ $+1, -3$లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము -3 అవుతుంది.

రెండు సంఖ్యలను కలపగ వచ్చు మొత్తము $19 + 23 = 42$ నుండి 20ని తీసివేయండి. 22 వస్తుంది. దీనిని 2 చే గుణించగ 44 అవుతుంది. దీనిని వందల పదల స్థానముగ తీసికొనగ 440 అవుతుంది. దీనినుండి 3ను తీసివేయండి. 437 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 19 \times 23 &= (19 + 23 - 20) \times 2, \ \ (20 - 19)(20 - 23) \\ &= 22 \times 2, \ \ 1 \times -3 \\ &= 440 - 3 = 437 \end{aligned}$$

ఇట్లే సమయస్ఫూర్తిగ ఒక సంఖ్య 20 కంటె తక్కువ, మరియొక సంఖ్య 20 కంటె ఎక్కువ అయినపుడు గుణించగ వచ్చును.

$$\begin{aligned} 18 \times 24 &= (18 + 24 - 20) \times 2, \ \ (20 - 18)(20 - 24) \\ &= 22 \times 2, 2 \times -4 \\ &= 440 - 8 \\ &= 432 \end{aligned}$$

30కి దగ్గఱనున్న అంకెల లబ్ధము కనుగొనుట

వివరణ: 30కి దగ్గరనున్న అంకెలను 30 నుండి తీసివేయండి. వీటి లబ్ధమును ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

రెండు సంఖ్యలను కలిపి 30ని తీసివేయండి. దీనిని 3చే గుణించి వందలు పదులు స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ: 27×28 విలువ కావలెను అనుకోండి. వీటిని 30 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 3,2 వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 6ను ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

రెండు సంఖ్యలను కలుపగ వచ్చు $27 + 28 = 55$ నుండి 30ని తీసివేయండి. 25 వస్తుంది. దీనిని 3చే గుణించగ వచ్చు 75ను వందలు పదుల స్థానముగ రాయుండి. అపుడు సంఖ్యల లబ్ధము 756 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 27 \times 28 &= (27 + 28 - 30) \times 3, \ \ (30 - 27)(30 - 28) \\ &= 25 \times 3, 3 \times 2 \\ & \quad 756 \end{aligned}$$

మరో ఉదాహరణ: 29×28 విలువ కావలెను అనుకోండి. వీటిని 30 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 1, 2లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 2ను ఒకట్ల స్థానముగ రాయుండి.

రెండు అంకెలను కలుపగ వచ్చు $29+28=57$ నుండి 30 తీసివేయండి. 27 వస్తుంది. దీనిని 3చే గుణించగ వచ్చు $27\times 3=81$ని వందలు పదుల స్థానముగ రాయండి. అపుడు లబ్ధము 812 అవుతుంది..

$$\begin{aligned} 29\times 28 &= (29+28-30)\times 3,\ (30-29)(30-20) \\ &= 27\times 3,\ 1\times 2 \\ &= 812. \end{aligned}$$

మరో క్లిష్టసమస్య: 28×33 విలువ కావలెను అనుకోండి. వీటిని 30 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 2, − 3 వస్తాయి. వీటి లబ్ధము −6 అవుతుంది.

రెండు సంఖ్యలను కలిపి 30ని తీసివేయండి. 31 వస్తుంది. దీనిని 3చే గుణించగ 93 వస్తుంది. దీనిని వందలు పదుల స్థానముగ రాయగ 930 అవుతుంది. దీనికి −6 తీసివేయగా 924 అవుతుంది.

ఇట్లే సమయస్ఫూర్తిగ 40, 50, 60లకు దగ్గఱనున్న సంఖ్యల లబ్ధములను కనుగొనవచ్చును.

100కి దగ్గఱనున్న అంకెల లబ్ధము కనుగొనుట

పద్ధతి: వంద నుండి తీసివేయగ వచ్చు అంకెల లబ్ధమును పదులు, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. ఆ సంఖ్యలను కలిపి 100ను తీసివేయగ వచ్చు సంఖ్యను వేలు, వందల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 93×92 కావలెను అనుకోండి.

100 నుండి వరుసగ తీసివేయగ వరుసగ 7, 8లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 56ను పదులు ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తమును $93+92=185$ నుండి 100 తీసివేయండి. 85 వస్తుంది. దీనిని వేలు, వందల స్థానముగ రాయండి. సంఖ్యల లబ్ధము 8556 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 93\times 92 &= (93+92-100),\ (100-93)(100-92) \\ &= 85,\ 7\times 8 \\ &= 8556 \end{aligned}$$

మరో ఉదాహరణ 99×97 కావలెను అనుకోండి.

100 నుండి వరుసగ తీసివేయగ వరుసగ 1, 3లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 3 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానముగ సున్న రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము $99+97=196$ నుండి 100ని తీసివేయండి. 96 వస్తుంది. దీనిని వేలు, వందల స్థానముగ రాయండి. లబ్ధము 9603 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 99 \times 97 &= (99+97-100), \ (100-99)(100-97) \\ &= 96, 1 \times 3 \\ &= 9603 \end{aligned}$$

క్లిష్టసమస్య-1: 98×102 విలువ కనుగొనవలెను అనుకోండి. 100 నుండి వరుసగ తీసివేయగ వరుసగ 2,-2లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము -4 వస్తుంది.

సంఖ్యల మొత్తము $98+102=200$ నుండి 100ని తీసివేయండి. 100 వస్తుంది. దీనిని పదివేలు, వేలు, వందల స్థానముగ రాయండి. 10,000 అవుతుంది. దీనికి −4 కలుపగ 9996 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 98 \times 102 &= (98+102-100), \ (100-98)(100-102) \\ &= 100, 2 \times -2 \\ &= 100, \ -4 \\ &= 10,000 - 4 = 9996 \end{aligned}$$

క్లిష్టసమస్య-2: 25×98 విలువ కనుగొనవలెను అనుకోండి. 100 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 75, 2లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 150 వస్తుంది. దీనిని వందలు, పదులు, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. అంకెల మొత్తము నుండి 100ను తీసివేయండి. 23 వస్తుంది. దీనిని వేలు, వందల స్థానముగ తీసికోండి. సంఖ్య విలువ 2300 అవుతుంది. దీనికి 150 కలుపగ లబ్ధము వస్తుంది. లబ్ధము 2450 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 25 \times 98 &= [25+98-100], \ [100-25][100-98] \\ &= 23, \ 75 \times 2 \\ &= 2300 + 150 = 2450 \end{aligned}$$

క్లిష్టసమస్య-3: 88×91 కావలెను అనుకోండి. 100 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 12,9లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 108 అవుతుంది. దీనిని వందలు, పదులు ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. అంకెల మొత్తమునుండి 100 ను తీసివేయండి. 79 వస్తుంది. దీనిని వేలు, వందలుగ తీసికొనగ 7900 అవుతుంది. దీనికి 108 కలుపగ లబ్ధము వస్తుంది. లబ్ధము 8008 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 88 \times 91 &= (88+91-100), \ (100-88)(100-91) \\ &= 79, 12 \times 9 \\ &= 7900 + 108 = 8008 \end{aligned}$$

మరియొక విధముగ కూడ గుణకారము చేయవచ్చును. రెండు సంఖ్యలు 100కు ఎంత తక్కువో కనుక్కోండి. మొదటి సంఖ్య నుండి రెండవ సంఖ్య ఎంత తక్కువో తీసివేసి, దానిని అన్ని వందలుగ తీసికోండి.

రెండు సంఖ్యలు ఎంతెంత తక్కువో వాటిని గుణించి కలపండి.

ఉదా:– $$\begin{aligned} 88 \times 91 &= (88-9)\times 100, 12\times 9 \\ &= 7900 + 108 = 8008 \end{aligned}$$

మరియొక విధముగ కూడ గుణకారము చేయవచ్చును. రెండు సంఖ్యలు 100కు ఎంత తక్కువో కనుక్కోండి. మొదటి సంఖ్య నుండి రెండవ సంఖ్య ఎంత తక్కువో తీసివేసి దానిని అన్ని వందలుగ తీసికోండి.

రెండు సంఖ్యలు ఎంతెంత తక్కువో వాటిని గుణించి కలపండి

ఉదా:– $$\begin{aligned} 88 \times 91 &= (88-9)\times 100, 12\times 9 \\ &= 7900 + 108 = 8008 \end{aligned}$$

200కి దగ్గఉనున్న సంఖ్యల లబ్ధము కనుగొనుట

పద్ధతి: 200 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ వచ్చు అంకెల లబ్ధమును పదులు ఒకట్ల స్థానముగ రాయుండి.

అంకెల మొత్తము నుండి 200 తీసివేయుండి. దీనిని 2చే గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను పదివేల, వేల, వందల స్థానముగ రాయుండి.

ఉదాహరణ–1: 198 × 199 కావలెను అనుకోండి. 200 నుండి వీటిని తీసివేయగ వరుసగ 2, 1లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 2 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయుండి. పదుల స్థానముగ సున్న రాయుండి.

సంఖ్యల మొత్తము $198 + 199 = 397$ నుండి 200ను తీసివేయుండి. 197 వస్తుంది. దీనిని 2చే గుణించగ 394 వస్తుంది. దీనిని పదివేలు, వేలు, పదుల స్థానముగ రాయుండి. లబ్ధము 39402 అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 198 \times 199 &= (198 + 199 - 200) \times 2, (200-198)(200-199) \\ &= 197 \times 2, 2 \times 1 \\ &= 39402 \end{aligned}$$

ఉదాహరణ–2: 201 × 202 విలువ కావలెను అనుకోండి. 200 నుండి వీటిని తీసివేయుండి. వరుసగ $-1, -2$ వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 2 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయుండి. పదుల స్థానముగ సున్న రాయుండి.

సంఖ్యల మొత్తము నుండి 200ను తీసివేయండి. 203 వస్తుంది. దీనిని 2చే గుణించగ 406 అవుతుంది. దీనిని పదివేలు, వేలు, వందల స్థానముగ రాయండి. లబ్ధము 40602 అవుతుంది.

$$\begin{aligned}201 \times 202 &= (201 + 202 - 200) \times 2, (200 - 201)(200 - 202)\\ &= 203 \times 2, -1 \times -2\\ &= 406,\ 2\\ &= 40602\end{aligned}$$

క్లిష్టసమస్య: 198×202 విలువ కావలెను అనుకోండి. 200 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 2, −2లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము −4 అవుతుంది.

సంఖ్యల మొత్తము నుండి 200ను తీసివేయండి. 200 వస్తుంది. దీనిని 2చే గుణించగ 400 వస్తుంది. దీనిని పదివేలు, వేలు, వందల స్థానముగ తీసికొనండి. 40000 అవుతుంది. దీనికి 4 తీసివేయండి. $40000 - 4 = 39996$ అవుతుంది.

$$\begin{aligned}198 \times 202 &= (198 + 202 - 200) \times 2, (200 - 198)(200 - 202)\\ &= 200 \times 2,\ \ 2 \times -2\\ &= 400,\ -4\\ &= 40000 - 4 = 39996\end{aligned}$$

ఇట్లే సమయస్ఫూర్తిగ 300, 400 సంఖ్యలకు దగ్గరినున్న సంఖ్యల లబ్ధములను కనుగొనవచ్చును.

1000కి దగ్గఱున్న అంకెల లబ్ధము కనుగొనుట

పద్ధతి: 1000 నుండి తీసివేయగ వచ్చు సంఖ్యల లబ్ధమును వందలు పదులు ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. సంఖ్యల మొత్తము నుండి 1000 తీసివేయగ వచ్చు సంఖ్యను లక్ష, పదివేలు, వేలస్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ–1: 998×997 విలువ కావలెను అనుకోండి 1000 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ వరుసగా 2,3లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 6 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానముగ సున్న, వందల స్థానముగ సున్న రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము $998 + 997 = 1995$ నుండి 1000 తీసివేయండి 995 వస్తుంది. దీనిని లక్ష పదివేలు వేల స్థానముగ రాయండి. 995006 వస్తుంది.

$$
\begin{aligned}
998 \times 997 &= (998 + 997 - 1000)(1000 - 998)(1000 - 997) \\
&= 995, \ \ 2 \times 3 \\
&= 995, \ \ 6 \\
&= 995006
\end{aligned}
$$

ఉదాహరణ–2: 1002×1003 విలువ కావలెను అనుకోండి. 1000 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ −2, −3లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 6 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదులు, వందలు స్థానముగ సున్నలు రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తమును $1002 + 1003$ నుండి 1000ని తీసివేయండి. 1005 వస్తుంది. దీనిని లక్ష, పదివేలు, వేల స్థానముగ రాయండి. 1005006 వస్తుంది.

$$
\begin{aligned}
1002 \times 1003 &= (1002 + 1003 - 1000) \\
&\quad (1000 - 1002)(1000 - 1003) \\
&= 1005, -2 \times -3 \\
&= 1005, \ \ 6 \\
&= 1005006
\end{aligned}
$$

ఉదాహరణ–3: 888×998 విలువ కావలెను అనుకోండి. 1000 నుండి వీటిని తీసివేయగ వరుసగ 112, 2లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 224 వస్తుంది.

సంఖ్యల మొత్తము నుండి 1000 తీసివేయండి. 886 వస్తుంది. దీనిని లక్ష పదివేల వేల స్థానముగ రాయండి.

సంఖ్యల లబ్ధము 886224 అవుతుంది.

$$
\begin{aligned}
888 \times 998 &= (888 + 988 - 1000) \\
&\quad (1000 - 888)(1000 - 998) \\
&= 886, 112 \times 2 \\
&= 886, 224 \\
&= 886224
\end{aligned}
$$

క్లిష్టసమస్య1: 888×991 విలువ కావలెను అనుకోండి. వీటిని 1000 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 112, 9లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 1008 అవుతుంది. దీనిని వేలు, వందలు, పదులు, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము $888 + 991 = 1879$ నుండి 1000ని తీసివేయండి. 897 అవుతుంది. దీనిని లక్ష, పదివేలు, వేల స్థానముగ రాసి 1008ని కలపండి.

$$
\begin{aligned}
888 \times 991 &= (888+991-1000),(1000-888)(1000-991)\\
&= 879, 112 \times 9\\
&= 879, 1008\\
&= \quad 1008
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
\;\;\, 879 \\
\hline
880008 \\
\hline
\end{array}
$$

క్లిష్టసమస్య–2: 998 × 1002 కావలెను అనుకోండి. 1000 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 2, −2లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము −4 వస్తుంది.

సంఖ్యల మొత్తము 998 + 1002 = 2000 నుండి 1000ని తీసివేయండి. దీనిని పదిలక్షలు, లక్షలు, పదివేలు, వేలుగ రాయండి. 10,00,000 అవుతుంది. దీనికి −4 తీసివేయండి. 9,99,996 అవుతుంది.

$$
\begin{aligned}
998 \times 1002 &= (998+1002-1000),(1000-998)(1000-1002)\\
&= 1000, 2 \times -2\\
&= 1000 - 4\\
&= 9{,}99{,}996 \text{ అవుతుంది.}
\end{aligned}
$$

2000కి దగ్గఱనున్న సంఖ్యల లబ్ధము కనుగొనుట

పద్ధతి: 2000 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయండి. వాటి లబ్ధము కనుక్కోండి. దీనిని వందలు, పదులు, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము నుండి 2000ను తీసివేసి లక్ష, పదివేలు, వేల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ–1: 1999 × 1998 విలువ కావలెను అనుకోండి. 2000 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ 1, 2 వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 2 వస్తుంది. దీనిని 2చే గుణించగా 3994 వస్తుంది దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదులు, వందల స్థానములుగ సున్నలు రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము 1999 + 1998 = 3997 నుండి 2000 తీసివేయండి. 1997 వస్తుంది. దీనిని పదిలక్షలు, లక్ష పదివేలు, వేలు స్థానములుగ రాయండి. సంఖ్యల లబ్ధము 3994002 అవుతుంది.

$$
\begin{aligned}
1999 \times 1998 &= (1999+1998-2000), \times 2, (2000-1999)\\
&\qquad\qquad (2000-1998)\\
&= 1997 \times 2, 1 \times 2
\end{aligned}
$$

$= 3994, 2$

$= 3994002$

ఉదాహరణ–2: 2001×2005 విలువ కావలెను అనుకోండి. 2000 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ $-1, -5$లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 5 అవుతుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. వందలు పదుల స్థానముగ సున్నలు వ్రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము $2001 + 2005 = 4006$ నుండి 2000 తీసివేయండి. 2006 వస్తుంది. దీనిని 2చే గుణించగా 4012 వస్తుంది. దీనిని పదిలక్షల, లక్ష, పదివేలు, వేల స్థానములుగ రాయండి. సంఖ్యల లబ్ధము 4012005 అవుతుంది.

$$2001 \times 2005 = (2001 + 2005 - 2000) \times 2, (2000 - 2001)(2000 - 2005)$$

$$= 2006 \times 2, \quad -1 \times -5$$

$$= 4012, \ 5$$

$$= 4012005$$

ఇట్లే 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 వేలకు దగ్గరనున్న సంఖ్యల లబ్ధము కనుగొనునపుడు సంఖ్యల మొత్తము నుండి ఆయా దగ్గరగనున్న సంఖ్యలను తీసివేసి ఆయా అంకెలతో గుణించి పై పద్ధతిలో వలె సంఖ్యల లబ్ధమును కనుగొనవచ్చును.

10 వేలకి దగ్గఱనున్న అంకెల లబ్ధము కనుగొనుట

పద్ధతి: పదివేల నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ వచ్చు అంకెల లబ్ధమును వేలు, వందలు, పదులు, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. సంఖ్యల మొత్తము నుండి 10000లను తీసివేయండి. దీనిని కోట్లు, పది లక్షలు, లక్షలు, పదివేలు వేల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ: 9997×9996 విలువ కావలెను అనుకోండి. 10000 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 3, 4లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 12 అవుతుంది. దీనిని పదులు ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. వేలు వందల స్థానములుగ సున్నలు రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము 9997+9996=19993 ను 10,000 తీసివేయగా 9993 వస్తుంది. 9993ను కోట్లు పదిలక్షలు లక్షలు పది వేలుగ రాయండి. సంఖ్యల లబ్ధము 9,99,30,012 అవుతుంది.

$$9997 \times 9996 = (9997 + 9996 - 10000), (10000 - 1997)(10000 - 9996)$$

$$= 9993, 3 \times 4$$
$$= 9,99,30,012$$

250కి దగ్గఱనున్న సంఖ్యల లబ్ధము కనుగొనుట

పద్ధతి: 250 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ వచ్చు సంఖ్యల లబ్ధమును వందలు, పదులు, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. సంఖ్యల మొత్తము నుండి 250 తీసివేయండి. 250 వెయ్యిలో 4 వ వంతు కావున 250 తీసివేయగ వచ్చు సంఖ్యను 4 చే భాగించండి. దీనిని పదివేలు, వేల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ–1: 249×245 విలువ కావలెను అనుకోండి. 250 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 1, 5లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 5 వస్తుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. వందలు, పదుల స్థానములుగ సున్నలు రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము $249 + 245 = 494$ నుండి 250 తీసివేయండి. 244 వస్తుంది. దీనిలో 4వ వంతు 61ని పదివేలు, వేల స్థానముగ రాయండి. లబ్ధము 61005 అవుతుంది.

$$249 \times 245 = (249 + 245 - 250) \times \tfrac{1}{4}, (250 - 249)(250 - 245)$$
$$= 244 \times \tfrac{1}{4}, 1 \times 5$$
$$= 61005$$

ఉదాహరణ–2: 249×246 విలువ కావలెను అనుకోండి. వీటిని 250 నుండి తీసివేయగ వరుసగ 1, 4లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము 4 అవుతుంది. దీనిని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. వందలు, పదుల స్థానములుగ సున్నలు రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము 249+246=495 నుండి 250 తీసివేయగ 245 వస్తుంది. దీనిని 4 చే భాగించగ $61\frac{1}{4}$ వస్తుంది. 61 ని పదివేలు వేల స్థానముగ రాయండి. $\frac{1}{4}$కు బదులుగ వేయిలోని 4 వ వంతు 250 ని తరువాత స్థానములకు కలుపుము. ఇపుడు లబ్ధము 61254 అవుతుంది.

$$249 \times 246 = (249 + 246 - 250) \times \tfrac{1}{4}, (250 - 249)(250 - 246)$$
$$= 245 \times \tfrac{1}{4}, 1 \times 4$$
$$= 61\tfrac{1}{4}, 4$$
$$= 61254$$

500 ఆధారముగా చేసికొని లబ్ధము కనుగొనుట

ఉదాహరణ–1: 19 × 499.

500 నుండి వీటిని తీసివేయగ వరుసగ 481, 1 లు వస్తాయి వీటి లబ్ధము 481 వస్తుంది. దీనిని వందలు, పదులు, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

సంఖ్యల మొత్తము 19+499=518 నుండి 500 తీసివేయగ 18 వస్తుంది. దీనిని సగము చేయగ 9 వస్తుంది. దీనిని వేలుగ తీసికోండి. సంఖ్యల లబ్ధము 9481 అవుతుంది.

$$19 \times 499 = (19 + 499 - 500) \times \tfrac{1}{2}, (500 - 19)(500 - 499)$$
$$= 18 \times \tfrac{1}{2}, 481 \times 1$$
$$= 9,\ 481$$
$$= 9481$$

ఉదాహరణ–2: 389 × 516

500 నుండి సంఖ్యలను తీసివేయగ వరుసగ 111, −16 లు వస్తాయి. వీటి లబ్ధము − 1776 అవుతుంది.

సంఖ్యల మొత్తము $389 + 516 = 905$ నుండి 500 తీసివేయండి. 405 వస్తుంది. దీనిని సగము చేయగ $202\frac{1}{2}$ వస్తుంది. దీనిలోని 202ను లక్షలు, పదివేలు, వేలుగ తీసికోండి $\frac{1}{2}$ బదులుగ వేయిలోని సగము 500ను 1776లో తీసివేయగ 1276 అవుతుంది. దీనిని 202000 నుండి తీసివేయండి. 200724 వస్తుంది.

$$389 \times 516 = (389 + 516 - 500) \times \tfrac{1}{2}, (500 - 389)(500 - 516)$$
$$= 405 \times \tfrac{1}{2}, 111 \times \ -16$$
$$= 202\tfrac{1}{2},\ \ -1776$$
$$= 202, -1276$$
$$= 202000 - 1276 = 200724$$

12.సులభ పద్ధతుల గుణకారములు

1. ఒక సంఖ్యను 5చే గుణించునపుడు సులభ పద్ధతిని లబ్ధము కనుగొనుట.

5చే గుణించునపుడు ముందుగ పదిచే గుణించి సగము చేసిన లబ్ధము వస్తుంది.

పద్ధతి: ఉదాహరణకు 36ను 5చే గుణించవలసినపుడు ముందుగ 10చే గుణించగ 360 వస్తుంది. దానిలో సగము విలువ 180 లబ్ధము అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ: 48ని 5చే గుణించవలసినపుడు ముందుగ 10చే గుణించగ 480 వస్తుంది. దానిలో సగము 240 లబ్ధము అవుతుంది.

2. ఒక సంఖ్యను 15చే గుణించునపుడు సులభ పద్ధతిని లబ్ధమును కనుగొనుట.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 15చే గుణించునపుడు ముందుగ 10చే గుణించగ వచ్చు సంఖ్యకు కనుగొనవలెను. దానిలో సగము విలువను కనుగొని మొదటి సంఖ్యలు కలుపగ లబ్ధము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 48ని 15చే గుణించగ వచ్చు లబ్ధము కావలెను అనుకోండి. 48ని 10చే గుణించగ 480 వస్తుంది.

480లో సగము విలువ 240 అవుతుంది. 480, 240ల మొత్తము 720 లబ్ధము అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ: 64ను 15చే గుణించగ వచ్చు లబ్ధము కనుగొనవలెను అనుకోండి. 64ను 10చే గుణించగ 640 వస్తుంది. దానిలో సగము 320 అవుతుంది. 640, 320ల మొత్తము 960 సంఖ్యల లబ్ధము అవుతుంది.

3. ఒక సంఖ్యను 25చే గుణించవలసినపుడు సులభ పద్ధతిని లబ్ధము కనుగొనుట.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 25చే గుణించగ వచ్చు లబ్ధము కనుగొనుటకు సంఖ్యను 100చే గుణించి 4వ వంతు చేసిన వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 48ని 25చే గుణించవలెనన్న 48ని 100చే గుణించగ 4800 వస్తుంది. దీనిలో 4వ వంతు విలువ 1200 సంఖ్యల లబ్ధము అవుతుంది.

4. ఒక సంఖ్యను 50చే గుణించినపుడు సులభ పద్ధతిని లబ్ధము కనుగొనుట.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 50 గుణించునపుడు ముందుగ 100చే గుణించి సగము చేసిన చాలు.

ఉదాహరణకు 64ను 50చే గుణించవలెను అనుకోండి.

100చే గుణించగ 6400 అవుతుంది. దానిలో సగము విలువ 3200 సంఖ్యల లబ్ధము అవుతుంది.

5. ఒక సంఖ్యను 9చే గుణించునపుడు సులభ పద్ధతిని లబ్ధము కనుగొనుట.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 9చే గుణించవలసి వచ్చినపుడు ముందుగ 10చే గుణించి వచ్చిన లబ్ధము నుండి గుణ్యమును తీసివేయగ సంఖ్యల లబ్ధము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 54ను 9చే గుణించవలెను అనుకోండి. 10చే గుణించగ 540 వస్తుంది. దీనినుండి 54 తీసివేయగ 486 అను లబ్ధము వస్తుంది.

6. ఇట్లే 8చే గుణించవలసి వచ్చినపుడు 10చే గుణించగ వచ్చిన లబ్ధము నుండి రెండు రెట్లు గుణ్యమును తీసివేయగ లబ్ధము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 48ని 8చే గుణించవలెను అనుకోండి. 10చే గుణించగ 480 వస్తుంది. దీనినుండి 48ని 2 రెట్లు చేయు సంఖ్య 96ను తీసివేయగ లబ్ధము $(480 - 96) = 384$ అవుతుంది.

7. ఒక సంఖ్యను 11చే గుణించునపుడు సులభపద్ధతిని లబ్ధము కనుగొనుట.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 11చే గుణించవలసినపుడు ముందుగ 10చే గుణించగ వచ్చు లబ్ధమునకు సంఖ్యను కలుపగ లబ్ధము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 64ను 11 గుణించవలెను అనుకోండి. 10చే గుణించగ 640 వస్తుంది. దానికి 64 కలుపగ లబ్ధము 704 వస్తుంది.

8. ఒక సంఖ్యను 12చే గుణించవలెనన్న సులభ పద్ధతిని లబ్ధము కొనుగొనుట.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 12చే గుణించవలసినపుడు 10చే గుణించి వచ్చిన లబ్ధమునకు సంఖ్యను 2చే గుణించగ వచ్చు లబ్ధమును కలుపవలెను.

ఉదాహరణకు 48ని 12చే గుణించవలెను అనుకోండి. 48ని 10చే గుణించగ 480 వస్తుంది. దానికి 48ని 2చే గుణించగ వచ్చు 96ను కలుపగ లబ్ధము 576 వస్తుంది.

9. రెండు అంకెలుగల సంఖ్యల లబ్ధము కనుగొనుటకు సులభ పద్ధతిని చేయు విధము. పదుల స్థానములో యున్నపుడు చేయు విధము.

పద్ధతి: రెండు అంకెలుగల సంఖ్య లబ్ధము కనుగొనవలెను అనుకోండి. మొదటి సంఖ్యకు 2వ సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానము కలిపి దానిని అన్ని పదులుగ తీసికొనండి. ఇపుడు సంఖ్యలలోని ఒకట్ల స్థానము అంకెలు గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను కలుపగ లబ్ధము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు: 13ను 19చే గుణించవలెను అనుకోండి. 13ను 9కి కలుపగ 22 వస్తుంది. దానిని పదుల స్థానముగ రాయగ 220 అవుతుంది. ఒకట్ల స్థానము అంకెల లబ్ధము $3 \times 9 = 27$ను 220కి కలుప లబ్ధము 247 వస్తుంది.

మరో ఉదాహరణ: 17ను 14చే గుణించవలెను అనుకోండి. 17ను 4కు కలుపగ 21 వస్తుంది. దానిని పదులుగ రాయగ 210 అవుతుంది. ఒకట్ల స్థానము అంకెల లబ్ధము $7 \times 4 = 28$ని 210కి కలుపగ లబ్ధము 238 వస్తుంది.

10. పదుల స్థానపు అంకెలు సమానముగా నున్నపుడు సంఖ్యల లబ్ధము కనుగొనుట.

పద్ధతి: మొదటి సంఖ్యకు 2వ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానము కలుపగ వచ్చు సంఖ్యను పదుల స్థానము అంకెతో గుణించగ వచ్చు లబ్ధము కనుగొనవలెను. దాని అన్ని పదులుగ రాయండి. దానికి సంఖ్యలలోని ఒకట్ల స్థానముగ గుణించగ వచ్చు సంఖ్య కలుపగ లబ్ధము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 49ని 42చే గుణించగ వచ్చు లబ్ధమును కనుగొనవలెను అనుకోండి.

49కి 2 కలుపగ 51 వస్తుంది. 51ని 4చే గుణించగ 204 వస్తుంది. దీనిని పదులుగ రాయగ 2040 అవుతుంది. దానికి ఒకట్ల స్థానముల లబ్ధము $9 \times 2 = 18$ కలుపగ లబ్ధము 2058 అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ: 58ని 53చే గుణించగ వచ్చు లబ్ధము కనుగొనవలెను అనుకోండి.

58కి 3 కలుపగ 61 వస్తుంది. 61ని 5ని గుణించగ 3050 వస్తుంది. దీనికి ఒకట్ల స్థానపు అంకెల లబ్ధము 24 కలుపగ 3074 అవుతుంది.

11. ఒకట్ల స్థానపు అంకెలు సమానముగ నున్నపుడు సంఖ్యల లబ్ధము కనుగొనుట.

పద్ధతి: పదుల స్థానములోని అంకెల లబ్ధము వందలుగ తీసికోండి.

పదుల స్థానములోని అంకెలు మొత్తమును ఒకట్ల స్థానము అంకెలతో గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను అన్ని పదుల స్థానముగ రాయండి. ఒకట్ల స్థానములోని అంకెల లబ్ధము ఒకట్లుగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 96ను 46చే గుణించవలెను అనుకోండి.

9×4 = 36 (వందలు) 3600

$(9 + 4)6$ = 78 పదులు = 780

6×6 = 36 ఒకట్లు

$96 \times 46 = 3600 + 780 + 36 = 4416$

మరో ఉదాహరణ: 62×42

6×4 = 24 (వందలు)

$(6 + 4)2$ = 20 పదులు

$2 \times 2 \quad = \quad 4$ ఒకట్లు
$62 \times 42 \quad = \quad 2400 + 200 + 4 = 2604$

ఇంకో ఉదాహరణ: 45×85

$4 \times 8 = 32$ (వందలు)

$(4 + 8) \times 5 \quad = \quad 60$ (పదులు)
$5 \times 5 \quad = \quad 25$ (ఒకట్లు)

$45 \times 85 = 3200 + 600 + 25 = 3825$

12. మొదటి అంకెలు సమానముగ నుండి ఒకట్ల స్థానపు అంకెల మొత్తము పది అయినపుడు లబ్ధము కనుగొనుట.

పద్ధతి: ఒకట్ల స్థానపు అంకెల లబ్ధమును పదులు ఒకట్ల స్థానముగ రాయుండి. పదుల స్థానపు అంకెలను, దాని తరువాత నున్న అంకెతో గుణించగ వచ్చు సంఖ్యను వేలు, వందలు స్థానముగ రాయుండి.

ఉదాహరణకు 96×94 కావలెను అనుకోండి. ఒకట్ల స్థానపు అంకెలు 6, 4ల లబ్ధము 24ను పదులు ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

పదుల స్థానపు అంకె 9 తరువాత నున్న అంకె 10తో గుణించగ వచ్చు 90ని వేలు, వందల స్థానముగ రాయుండి.

$96 \times 94 = 9 \times 10.$	$6 \times 4 = 9024$
$99 \times 91 = 9 \times 10.$	$9 \times 1 = 9009$
$71 \times 79 = 7 \times 8.$	$1 \times 9 = 5009$
$114 \times 116 = 11 \times 12.$	$4 \times 6 = 13224$

13. ఒక సంఖ్యను $7\frac{1}{2}$చే సులభముగ గుణించి లబ్ధము కనుగొనుట.

పద్ధతి: $7\frac{1}{2}$చే గుణించవలసి వచ్చినపుడు గుణ్యమునకు సున్న చేర్చగ వచ్చు సంఖ్యను సంఖ్య నుండి దానిలో 4వ వంతు విలువను తీసివేయుండి. ఎందువలన అనగ $7\frac{1}{2}$ పదిలో $\frac{3}{4}$ వంతు కావున.

ఉదాహరణకు 44ను $7\frac{1}{2}$ గుణించవలెను అనుకోండి. 44ను పదిచే గుణించగ 440 వస్తుంది. దానిలో 4 వ వంతు విలువ 110ని 440 నుండి తీసివేయండి లబ్ధము వస్తుంది.

$44 \times 7\frac{1}{2} = 440 - 110 = 330$

మరో ఉదాహరణ: $36 \times 7\frac{1}{2} = 360 - 90 = 270$

14. ఒక సంఖ్యను $12\frac{1}{2}$చే గుణించగ వచ్చు లబ్ధము కనుగొనుట.

పద్ధతి: $12\frac{1}{2}$ చే గుణించవలసినపుడు గుణ్యమునకు సున్న చేర్చగ వచ్చు సంఖ్యకు, గుణ్యములో 4వ వంతు సంఖ్యను కలుపవలెను. ఎందువలన అనగ $2\frac{1}{2}$ పదిలో 4వ వంతు కావున.

ఉదాహరణకు 48ని $12\frac{1}{2}$చే గుణించవలెను అనుకోండి. 48ని 10చే గుణించగ 480 వస్తుంది. 480లో 4వ వంతు 120 వస్తుంది. 480, 120లను కలుపగ లబ్ధము 600 అవుతుంది.

$48 \times 12\frac{1}{2} = 480 + 120 = 600$

15. ఒక సంఖ్యను $2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}$ లచే గుణించగ వచ్చు లబ్ధమును కనుగొనుట.

పద్ధతి: $2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}$ లచే గుణించవలసి వచ్చినపుడు గుణ్యమును సగముచేసి వరుసగ 5, 7, 9, 11లచే గుణించవలెను.

ఉదాహరణ 1) $62 \times 2\frac{1}{2} = 31 \times 5 = 155$

2) $48 \times 3\frac{1}{2} = 24 \times 7 = 168$

3) $36 \times 4\frac{1}{2} = 18 \times 9 = 162$

4) $24 \times 5\frac{1}{2} = 12 \times 11 = 132$

13. అంకెలతో భాగింపబడుటకు నియమములు

1. ఒక సంఖ్య 2చే భాగించబడవలెనన్న సంఖ్య చివర సున్నగాని సరి సంఖ్యగాని యుండవలెను.

ఉదాహరణకు 430, 432, 436 లు 2 చే భాగింపబడతాయి.

2. ఒక సంఖ్య 3చే భాగింపబడవలెనన్న అంకెల మొత్తము 3 చే భాగించబడవలెను.

ఉదాహరణకు 27ను తీసికోండి. అంకెల మొత్తము 9. ఇది 3 చే భాగించబడును. కావున 27 అను సంఖ్య 3చే భాగింపడును.

207 ను తీసికోండి. అంకెల మొత్తము 9. ఇది 3 చే భాగించబడును. కావున 207 అను సంఖ్య 3 చే భాగింపబడును.

3. ఒక సంఖ్య 4 చే భాగించబడవలెనన్న చివరి రెండు అంకెలు 4 చే భాగించబడవలెను. లేక చివరి రెండు అంకెలు సున్నలు కావలెను.

ఉదాహరణకు 728ని తీసికోండి. చివరి రెండు అంకెలు 28, 4 చే భాగించబడును కావున సంఖ్య 4 చే భాగింపబడును.

8200 తీసికోండి చివర రెండు సున్నలున్నవి కావున 4చే భాగించబడును.

4. ఒక సంఖ్య 5 చే భాగించబడవలెనన్న చివరి అంకె 5 గాని సున్నగాని అయి యుండవలయును.

ఉదాహరణకు 305 తీసికోండి, ఇది 5 చే భాగించబడును. మరియొక ఉదాహరణ 350 తీసికోండి. ఇదికూడ 5చే భాగింపబడును.

5. ఒక సంఖ్య 6చే భాగించబడవలెనన్న చివరి అంకె సరిసంఖ్య అయియుండి, అంకెల మొత్తము 3 చే భాగింపబడవలెను.

ఉదాహరణకు 216 తీసికోండి. ఇది సరిసంఖ్య, మరియు అంకెల మొత్తము 2+1+6=9. ఇది 3 చే భాగింపబడును. కావున 6 చే భాగింపబడును.

మరియొక ఉదాహరణ: 296 ఇది సరిసంఖ్య. కాని అంకెల మొత్తము 2+9+6=17. ఇది 3 చే భాగింపబడదు. కావున 296 అను సంఖ్య 6చే భాగింపబడదు.

6. రెండు అంకెలు గల సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానపు అంకెను 5చే గుణించి పదుల స్థానపు అంకెకు కలుపగ వచ్చు సంఖ్య 7చే భాగింపబడినచో ఇచ్చిన సంఖ్య 7 చే భాగించబడును.

ఉదాహరణకు 14ను 7చే భాగించవలెను అనుకోండి. ఒకట్లస్థానపు అంకె 4ను 5చే గుణించి 1ని కలుపగ 21 వస్తుంది. మరల 1ని 5చే గుణించి 2 కలుపగా 7 వస్తుంది. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 7చే భాగించబడును.

$4 \times 5 + 1 = 21, 1 \times 5 + 2 = 7$

7. 28 ని 7చే భాగింపవలెను అనుకోండి.

8ని 5చే గుణించగ వచ్చు 40కి 2 కలుపగ 42 వస్తుంది 2ను 5చే గుణించి 4ను కలుపగా 14 వస్తుంది, ఇది 7చే భాగింపబడుతుంది. కావున 28, 7చే భాగింపబడును.

$8 \times 5 + 2 = 42.\ \ 2 \times 5 + 4 = 14$

3) 63ను 7చే భాగించవలెను అనుకోండి.

3ను 5చే గుణించగ 75 వస్తుంది. దీనికి 6 కలుపగ 21 వస్తుంది ఇది 7చే భాగింపబడును కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 7చే భాగింపబడును

$3 \times 5 + 6 = 21, 1 \times 5 + 2 = 7$

4) 98ని 7చే భాగించవలెను అనుకోండి.

8ని 6చే గుణించగ 40 వస్తుంది. దానికి 9 కలుపగ 49 వస్తుంది.

$8 \times 5 + 9 = 49$ 7చే భాగింపబడును.

5) 91 ని 7చే భాగించవలెను అనుకోండి.

1ని 5చే గుణించగ 5 వస్తుంది. దీనిని 9కి కలుపగ 14 వస్తుంది. ఇది 7చే భాగింపబడును. కావున 91, 7చే భాగింపబడును.

7) 3 అంకెలుగల సంఖ్య 7చే భాగింపబడుటకు నియమము.

పద్ధతి: మూడు అంకెలుగల సంఖ్య 7చే భాగింపబడునో లేదో తెలుసుకొనవలెనన్న ఒకట్ల స్థానపు అంకెను 5 చే గుణించి మిగిలిన సంఖ్యను కలుపవలెను.

ఉదాహరణకు 112 ను 7చే బాగించవలెను అనుకోండి. 2ను 5చే గుణించి 11ను కలపండి. 21 వస్తుంది. ఇది 7చే భాగింపబడును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 7చే భాగించబడును.

మరో ఉదాహరణ: 336ను 7చే భాగించవలెను అనుకోండి. 6ను 5చే గుణించగ 30 వస్తుంది. దానిని 33కు కలుపగ 63 వస్తుంది. మరల 3ను 5చే గుణించి 6కు కలపండి. 21 వస్తుంది. ఇది 7చే భాగించబడును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 7చే భాగింపబడును.

$6 \times 5 + 33 = 30 + 33 = 63$

$3 \times 5 + 6 = 15 + 6 = 21$

8. ఒక సంఖ్య 8చే భాగించబడుటకు నియమము.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్య 8 చే భాగింపబడవలెనన్న చివరి 3 అంకెలు 8 చే భాగింపబడవలెను.

ఉదాహరణ 2368 ని 8 చే భాగించవలెను అనుకోండి, వీనిలో చివరి 3 అంకెలు గల సంఖ్య 368 ఎనిమిదిచే భాగించబడును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 8 చే భాగించబడును.

మరో ఉదాహరణ: 1112 ను 8చే భాగించవలెను అనుకోండి. చివరి మూడు అంకెలు గల సంఖ్య 112 ఎనిమిదిచే భాగించబడును. కావున ఇచ్చిన సంఖ్య 8చే భాగించబడును.

9. ఒక సంఖ్య 9 చే భాగించబడుటకు అంకెల మొత్తము 9చే భాగించబడవలెను.

ఉదాహరణకు 4131 ని 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. అంకెల మొత్తము 1+4+3+1=9. ఇది 9 చే భాగించబడును. కావున యిచ్చిన సంఖ్య 9 చే భాగింపబడును.

మరో ఉదాహరణ: 83916 ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి అంకెల మొత్తము 8+3+9+1+6=27. మరల అంకెల మొత్తము 2+7=9 కావున యిచ్చిన సంఖ్య 9చే భాగింబడును.

10. ఒక సంఖ్య 10 చే భాగింపబడవలెనన్న చివరి అంకె సున్న అయియుండవలయును.

11. ఒక సంఖ్య 11చే భాగింపబడవలెనన్న అంకెల మొత్తము బేసి స్థానములోని అంకెల మొత్తము యొక్క భేదము 11గాని 0గాని అయియుండవలెను.

ఉదాహరణకు 58432 తీసికోండి.

బేసి స్థానములోని అంకెల మొత్తము 5+4+2=11

సరి స్థానములోని అంకెల మొత్తము 8+3=11

భేదము $11 - 11 = 0$ కావున 11చే భాగించబడును.

14. భాగహారములు (Divisions)

మౌఖికముగ భాగహారములు చేయు పద్ధతులను వివరిస్తాను. వీటిని అధ్యయనము చేసినచో భాగహారములు చేయకుండగనే విభక్తము, శేషములను కనుకొనవచ్చును.

భాగింపబడు సంఖ్యను విభాజ్యము అంటాము. భాగించు సంఖ్యను విభాజకము అంటాము. భాగించగ వచ్చు ఫలమును విభక్తము (Quotient) శేషము (Remainder) అంటాము. ప్రతి భాగాహారమునందును–

విభాజ్యము = విభాజకము × విభక్తము + శేషము అగును.

1. రెండు అంకెలుగల సంఖ్యను 9 చే భాగించినపుడు విభక్తము (Quotient) శేషము (Remainder) లను కనుగొనుట.

రెండు అంకెలు గల సంఖ్యలు పదుల స్థానపు అంకె విభక్తము లగును. అంకెల మొత్తము శేషము అగును.

ఉదాహరణ:

1) 13ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము పదుల స్థానపు అంకె 1 అగును. శేషము అంకెల మొత్తము 1+3=4 అగును.

2) 52ను 9చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము పదుల స్థానపు అంకె 5 అగును. శేషము అంకెల మొత్తము 5+2=7 అగును.

3) 27 ను 9చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము పదుల స్థానపు అంకె 2 అగును. శేషము అంకెల మొత్తము 2+7=9 అగును. శేషమునకు మరల విభక్తము 1 కావున మొత్తము విభక్తము 3 అగును. శేషము సున్న అగును.

4) 83 ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము పదుల స్థానపు అంకె 8 అగును. శేషము అంకెల మొత్తము 8+3=11 అగును. మరల శేషమునకు విభక్తము 1, శేషము 1 అగును. కావున మొత్తము విభక్తము 8+1=9. శేషము 1 అగును.

2. 3 అంకెలుగల సంఖ్యను 9చే భాగించునపుడు విభక్తము శేషములను కనుగొనుట.

పద్ధతి: 3 అంకెలుగల సంఖ్యను 9 చే భాగించునపుడు విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి రెండు అంకెల సంఖ్యకు మొదటి అంకె కలుపవలయును.

ఉదాహరణ:

1) 103 ను 9చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి రెండు ఆంకెల సంఖ్య 10 కి 1 కలుపవలెను. అపుడు విభక్తము 10+1=11 అగును.

శేషము అంకెల మొత్తము 1+0+3=4 అవుతుంది.

2) 114 ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి రెండు అంకెలుగల సంఖ్య 11 కు 1 కలుపవలెను. అపుడు విభక్తము 11+1=12 అగును.

శేషము అంకెల మొత్తము 1+1+4=6 అవుతుంది.

3) 212 ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి రెండు అంకెలు గల సంఖ్య 21 కి 2 కలుపవలెను. అపుడు విభక్తము 21+2=23 అగును.

శేషము అంకెల మొత్తము 2+1+2=5 అవుతుంది.

4) 225 ను 9చే భాగింపవలెను అనుకోండి. విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి రెండు అంకెలు గల సంఖ్య 22 కు 2 కలుపవలెను. అపుడు విభక్తము 24 అగును.

శేషము అంకెల మొత్తము 2+2+5=9 అవుతుంది. కాని శేషమునకు మరల విభక్తము 1 కావున మొత్తము విభక్తము 24+1=25 అవుతుంది. శేషము సున్న అవుతుంది.

5) 138 ని 9 చే భాగింపవలెను అనుకోండి. విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి రెండు అంకెలు గల సంఖ్య 13కు 1 కలుపవలెను. అపుడు విభక్తము 13+1=14 అగును. శేషము అంకెల మొత్తము 1+3+8=12 అవుతుంది. కాని శేషమునకు మరల విభక్తము 1. శేషము 1+2=3 అగును. కావున మొత్తము విభక్తము 14+1=15 శేషము 3 అగును.

4 అంకెలు గల సంఖ్యను 9చే భాగించునపుడు విభక్తము, శేషములను కనుగొనుట.

పద్ధతి: 4 అంకెలు గల సంఖ్యను 9 చే భాగించినపుడు విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి అంకెను 2వ అంకెకు, మొదటి 2 అంకెల మొత్తమును 3వ అంకెకు కిందుగ రాసి కలపండి. ఇది విభక్తము అగును. అంకెల మొత్తము శేషము అగును.

ఉదాహరణకు 1203 ను 9చే భాగించవలెను అనుకోండి. 1ని 2కు కిందుగను, 1, 2 ల మొత్తము 0కు కిందుగను వేసి కలపండి. విభక్తము వస్తుంది. అంకెల మొత్తము శేషము అగును.

విభక్తము = 120 శేషము =1+2+0+3=6
13

133

2) 1507 ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. 1ని 5కు కిందుగను 1, 5 ల మొత్తము 6ను 0కు కిందుగను రాసి కలపండి. విభక్తము వస్తుంది. అంకెల మొత్తము శేషము అవుతుంది.

విభక్తము = 150 శేషము =1+5+0+7=13
16 శేషమునకు మరల విభక్తము 1,
---
166 శేషము 4 అవుతుంది.

కావున మొత్తము విభక్తము = 166+1=167
శేషము = 4

3) 1231 ని 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. 1ని 2కి కిందుగను 1, 2ల మొత్తము 3ను 3కు కిందుగను రాసి కలపండి.

విభక్తము = 123
13

136

శేషము = 1+2+3+1=7

ఇదే పద్ధతిని 4 అంకెలు గల సంఖ్యను 9 చే భాగించునపుడు విభక్తము, శేషములను కనుగొనవచ్చును.

5 అంకెలు గల సంఖ్యను 9చే భాగించునపుడు విభక్తము, శేషములను కనుగొనుట.

పద్ధతి: 5 అంకెలు గల సంఖ్యను 9చే భాగించునపుడు విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి అంకెను 2 వ అంకెకు కిందుగను, 2 అంకెల మొత్తమును 3 వ అంకెకు కిందుగను, 3 అంకెల మొత్తమును 4 వ అంకెకు కిందుగను కలుపగ విభక్తము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 12002 ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. 1ని 2కు కిందుగను 1+2 ల మొత్తము 3ను వందల స్థానమునకు కిందుగను 1, 2, 0 ల మొత్తము 3ను పదుల స్థానమునకు కిందుగను రాసి కలుపండి, విభక్తము వస్తుంది.

విభక్తము 1200
133
1333

శేషము=అంకెల మొత్తము=1+2+0+0+2=5

ఉదాహరణ–2: 13102ను 9 చే భాగించవలెను అనుకోండి. 1ని 3కు కిందుగను 1+3=4 పదుల స్థానమును వందల స్థానమునకు కిందుగను 1+3+1=5 ను పదుల స్థానమునకు కిందుగను రాసి కలపండి, విభక్తము వస్తుంది.

విభక్తము 1310
145
1455

శేషము = 1+3+1+0+2=7 అవుతుంది.

1. రెండు అంకెలు గల సంఖ్యను 8 చే భాగించునపుడు విభక్తము (Quotient) శేషము (Remainder) లను కనుగొనుట.

పద్ధతి: రెండు అంకెలుగల సంఖ్యను 8చే భాగించునపుడు పదుల స్థానపు అంకె విభక్తము అవుతుంది. మొదటి అంకెను 2చే గుణించి ఒకట్ల స్థానమునకు కలుపగ శేషము వస్తుంది.

ఉదాహరణ:

1) 23 ను 8 చే భాగించవలెను అనుకోండి, విభక్తము పదుల స్థానపు అంకె 2 అగును.

శేషము $= 2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7$

2) 24 ను 8 చే భాగించవలెను అనుకోండి, విభక్తము పదుల స్థానపు అంకె 2 అగును.

శేషము $= 2 \times 2 + 4 = 8$ వస్తుంది. కాని శేషమునకు మరల విభక్తము 1 అవుతుంది. శేషము సున్న అవుతుంది.

మొత్తము విభక్తము 2+1=3 అవుతుంది.

3) 36 ను 8 చే భాగించవలెను, అనుకోండి, విభక్తము పదుల స్థానము అంకె 3 అగును.

శేషము $= 3 \times 2 + 6 = 12$ అవుతుంది. కాని యీ శేషమునకు మరల విభక్తము 1 శేషము 4 అవుతుంది. మొత్తము విభక్తము 4 అవుతుంది.

4) 92 ను 8 చే భాగింపవలెను అనుకోండి, విభక్తము పధుల స్థానపు అంకె 9 అగును. శేషము $9 \times 2 + 2 = 18 + 2 = 20$ అవుతుంది. కాని

యీా శేషమునకు విభక్తము 2, శేషము 4 అవుతుంది. మొత్తము విభక్తము 9+2=11.

2. మూాడు అంకెలు గల సంఖ్యలను 8 చే భాగించునపుడు విభక్తము శేషములను కనుగొనుట.

పద్ధతి: 3 అంకెలు గల సంఖ్యను 8చే భాగించినపుడు విభక్తము వచ్చుటకు మొదటి రెండు అంకెల సంఖ్యకు మొదటి అంకెను 2చే గుణించి కలుపవలెను.

విభక్తము యొక్క పదుల స్థానము అంకెను 2 చే గుణించి ఒకట్ల స్థానమునకు కలుపగ శేషము వస్తుంది.

ఉదాహరణ:

1) 101 ని 8 చే భాగించవలెను అనుకోండి.

విభక్తము $= 10 + 1 \times 2 = 10 + 2 = 12$

శేషము $= 2 \times 2 + 1 = 5$ అవుతుంది.

2) 104 ను 8 చే భాగించవలెనన్న విభక్తము $10 + 2 \times 1 = 10 + 2 = 12$ శేషము $= 2 \times 2 + 4 = 8$. శేషమునకు విభక్తము 1, శేషము సున్న అగును కావున మొత్తము విభక్తము 12+1=13. శేషము=0.

3) 211 ను 8 చే భాగించవలెనన్న విభక్తము $21 + 2 \times 2 = 21 + 4 = 25$. శేషము $= 5 \times 2 + 1 = 11$ అవుతుంది. శేషమునకు విభక్తము 1, శేషము 3 అగును. కావున మొత్తము విభక్తము 25+1=26. శేషము 3 అగును.

4) 311 ను 8చే భాగించవలెనన్న విభక్తము $31 + 2 \times 3 = 31 + 6 = 37$ అవుతుంది. శేషము $7 \times 2 + 1 = 15$ అవుతుంది. మరల శేషమునకు విభక్తము 1 శేషము 7 అవుతుంది. మొత్తము విభక్తము 38 అవుతుంది. శేషము 7 అవుతుంది.

5) 3 అంకెలు గల సంఖ్యలో పదుల స్థానములో 5 కంటె పెద్ద సంఖ్య యున్నపుడు యీా క్రింది విధముగ చేస్తాము.

266ను 8 చే భాగించవలెనన్న విభక్తము $26 + 2 \times 2 = 30$ అవుతుంది. శేషము వచ్చుటకు విభక్తములోని ఒకట్ల స్థానమునకు పది కలిపి 2చే గుణించి ఒకట్ల స్థానము కలుపవలెను. శేషము $= (0 + 10)2 + 6 = 26$. దీని విభక్తము 3. శేషము 2 కావున మొత్తము విభక్తము 33 అవుతుంది.

1) 2 అంకెలు గల సంఖ్యను 7చే భాగించునపుడు విభక్తము శేషములను కనుకొనుట.

పద్ధతి: రెండు అంకెలు గల సంఖ్యను 7చే భాగించునపుడు పదుల స్థానపు అంకె విభక్తము అగును. పదుల స్థానపు అంకెను 3చే గుణించి ఒకట్ల స్థానమునకు కలుపగ శేషము వస్తుంది.

ఉదాహరణ:

1) 12 ను 7చే భాగించవలెనన్న విభక్తము =1. శేషము $= 1 \times 3 + 2 = 5$.

2) 22ను 7చే భాగించవలెననన్న విభక్తము = 2. శేషము $= 2 \times 3 + 2 = 8$. శేషమునకు మరల విభక్తము 1 శేషము 1 అగును. కావున మొత్తము విభక్తము = 3, శేషము 1 అగును.

3) 29 ని 7 చే భాగించగ విభక్తము =2. శేషము $= 2 \times 3 + 9 = 15$. శేషమునకు మరల విభక్తము 2, శేషము 1 వస్తుంది. మొత్తము విభక్తము 4, శేషము 1 అవుతుంది.

4) 31 ని 7చే భాగించగ విభక్తము =3, శేషము $3 \times 3 + 1 = 10$ అగును. శేషమునకు మరల విభక్తము 1, శేషము 3 అవుతుంది. మొత్తము విభక్తము =3+1=4, శేషము=3 అవుతుంది.

5) 51ని 7చే భాగించబడవలెనన్న విభక్తము =5. శేషము $= 5 \times 3 + 1 = 16$. శేషమునకు మరల విభక్తము=2 శేషము=2 కావున మొత్తము విభక్తము=5+2=7. శేషము = 2

3 అంకెలు గల సంఖ్యను 7 చే భాగించునపుడు విభక్తము, శేషములను కనుగొనుట.

పద్ధతి: 3 అంకెలు గల సంఖ్యను 7 చే భాగించునపుడు మొదటి రెండు అంకెల సంఖ్యకు మొదటి అంకెను 3 చే గుణించి కలుపగ వచ్చు సంఖ్యకు సమానము.

విభక్తము యొక్క ఒకట్ల స్థానపు సంఖ్యను 3చే గుణించి ఒకట్ల స్థానము కలుపగ శేషము వస్తుంది.

ఉదాహరణ:

1) 101 ని 7చే భాగించవలెనన్న, విభక్తము $= 10 + 1 \times 3 = 13$. శేషము $3 \times 3 + 1 = 10$. శేషమునకు మరల విభక్తము 1, శేషము =3 కావున మొత్తము విభక్తము=14 శేషము=33.

2) 109 ని 7చే భాగించవలెనన్న విభక్తము $= 10 + 1 \times 3 = 13$. శేషము $3 \times 3 + 9 = 18$. శేషమునకు మరల విభక్తము 2, శేషము 4. కావున మొత్తము విభక్తము =16, శేషము=4 అగును.

3) 176 ను 7 చే భాగింపవలెనన్న విభక్తము $= 17 + 1 \times 3 = 20$ శేషము విభక్తములోని ఒకట్ల స్థానమునకు 10 కలుపగ వచ్చు సంఖ్యను 3చే గుణించి ఒకట్లస్థానము కలుపవలెను. $10 \times 3 + 6 = 36$. దీనికి మరల విభక్తము 5, శేషము 1, మొత్తము విభక్తము=20+5=25, శేషము=1.

4) 196 ను 7 చే భాగించగ విభక్తము $= 19 + 1 \times 3 = 22$, శేషము $12 \times 3 + 6 = 42$. దీనికి మరల విభక్తము 6, శేషము సున్న, కావున మొత్తము విభక్తము =22+6=28.

నూటికి దగ్గఱనున్న సంఖ్యలు

పద్ధతి: నూటికి దగ్గరనున్న సంఖ్యలతో భాగించునపుడు విభాజ్యము యొక్క వందల స్థానము విభక్తము అగును. విభాజ్యము నుండి 100ను తీసివేయగ వచ్చు సంఖ్యను పదులు ఒకట్ల స్థానమునకు కలుపగ శేషము వస్తుంది.

ఉదాహరణ:

1. 111ను 89చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము = 1

   100 నుండి 89ని తీసివేయగ 11 వస్తుంది. దీనిని పదులు ఒకట్ల స్థానమునకు కలుపగ శేషము = $11 + 11 = 22$ అవుతుంది.

2. 112ను 73చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము = 1

   100 నుండి 73 తీసివేయగ 27 వస్తుంది.

   శేషము = $12 + 27 = 39$

3. 198ని 88చే భాగించవలెను అనుకోండి. విభక్తము = 1

   100 నుండి 88ని తీసివేయగ 12 వస్తుంది. దీనిని 98కి కలుపగా శేషము వస్తుంది.

   శేషము = $98 + 12 = 110$

   శేషమునకు మరల విభక్తము 1, శేషము 22

   కావున మొత్తము విభక్తము = 2, శేషము 22.

సులభ పద్ధతుల భాగహారములు

1) ఒక సంఖ్యను 5చే భాగించవలసినపుడు సులభ పద్ధతిని చేయు విధము.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 5చే భాగించవలసి వచ్చినపుడు సంఖ్యను రెట్టింపుచేసి కుడివైపు నుండి ఒక డెసిమల్ స్థానమును ఎడమకు జరపవలయును.

ఉదాహరణకు: 165ను 5చే భాగించవలయును అనుకోండి. 165ను రెట్టింపు చేయగ 330 అవుతుంది. దీనిని 10చే భాగించగ (లేక ఒక డెసిమల్ స్థానమును కుడినుండి ఎడమకు జరుపగ) విభక్తము 33 అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ: 127ను 5చే భాగించవలెను అనుకోండి. 127ను రెట్టింపు చేయగ 254 వస్తుంది. దీనిని 10చే భాగింపగ 25.4 అవుతుంది.

2) ఒక సంఖ్యను 15చే భాగించునపుడు సులభ పద్ధతిని చేయు విధము.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 15చే భాగింపవలసినపుడు సంఖ్యను రెట్టింపు చేసి 30చే భాగింపవలయును.

ఉదాహరణకు 105ను 15చే భాగింపవలయును అనుకోండి 105ను రెట్టింపు చేయగ 210 అవుతుంది. దీనిని 30చే భాగించగ 7 వస్తుంది.

ఉదాహరణకు 105ను 15చే భాగింపవలయును అనుకోండి. 105ను రెట్టింపు చేయగ 210 అవుతుంది. దీనిని 30చే భాగించగ 7 వస్తుంది.

మరో ఉదాహరణ: 75ను 15చే భాగించవలయును అనుకోండి, 75ను రెట్టింపు చేయగ 150 వస్తుంది. దీనిని 35చే భాగించగ 5 వస్తుంది.

3) ఒక సంఖ్యను 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 మొదలగు సరి సంఖ్యతో భాగింపవలసినపుడు సులభ పద్ధతులు.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 మొదలగు సరి సంఖ్యలతో భాగింపవలసినపుడు ఇచ్చిన సంఖ్యలను సగము చేసి వరుసగ 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12చే వరుసగ భాగించవలయును.

ఉదాహరణ:

1) 204ను 12చే భాగించవలెనన్న 204 సగము 102ను 6చే భాగించవలెను.

$$\frac{204}{12} = \frac{102}{6} = 17$$

2) 392ను 14చే భాగించవలెనన్న 392లో సగము 196ను 7చే భాగించవలెను.

$$\frac{392}{14} = \frac{196}{7} = 28$$

ఇట్లే 16, 18, 20లచే భాగించవచ్చును.

3) 1176ను 24చే భాగించవలెనన్న 1176 లోని సగము 588ని 12చే భాగించవలెను.

$$\frac{1176}{24} = \frac{588}{12} = 49$$

ఇట్లే సరిసంఖ్య గల భాగహారము చేయునపుడు సులభముగ చేయవచ్చును.

4) కారణాంకములుగ విభజించి భాగించు పద్ధతులు.

పద్ధతి: ఒక సంఖ్యను కారణాంకములుగల సంఖ్యతో భాగించవలసినపుడు కారణాంకములుగ విభజించి మొదటి సంఖ్యను ఒక కారణాంకముతో భాగించగ వచ్చు సంఖ్యను మరల 2వ కారణాంకముతో భాగించవలయును.

ఉదాహరణ:

1) 1088ని 32 చే భాగించవలయును అనుకోండి. 32ను కారణాంకములుగ విభజించగ 8,4లు వస్తాయి. మొదట 8చే భాగించగ 136 వస్తుంది. మరల 4చే భాగించగ 34 వస్తుంది.

$$\frac{1088}{8} = 136, \frac{136}{4} = 34$$
$$\therefore \frac{1088}{32} = 34$$

2) 832ను 16చే భాగించవలయును అనుకోండి. 16ను కారణాంకములుగ విభజించగ 8, 2లు వస్తాయి. మొదట 8చే భాగించగ 104 వస్తుంది. మరల 2చే భాగించగ 52 వస్తుంది.

$$\frac{832}{8} = 104, \frac{104}{2} = 52$$
$$\therefore \frac{832}{16} = 52$$

15. వర్గములు (Squares)

1. ఏకాంకముల వర్గములు

పద్ధతి: ఈ పద్ధతిననుసరించి ఇచ్చిన అంకె 10 కంటె ఎంత తక్కువో అంత వర్గమును ఒకట్ల స్థానముగ రాస్తాము. ఇచ్చిన అంకె నుండి తక్కువ అంకెను తీసివేయగ వచ్చు అంకె పదుల స్థానముగ తీసికొంటాము.

ఉదాహరణ: 1:9 యొక్క వర్గము 9^2 కావలెను అనుకోండి. 9 పదికి 1 తక్కువ కావున 1 యొక్క వర్గము 1 ఒకట్ల స్థానముగ తీసికొంటాము.

9 నుండి 1ని తీసివేయగ వచ్చు అంకె 8ని పదుల స్థానముగ తీసికొంటాము. కావున $9^2 = 81$.

ఉదాహరణ: 2:7 యొక్క వర్గము 7^2 కావలెను అనుకోండి. 7 పదికి 3 తక్కువ కావున 3 యొక్క వర్గము 9 ని ఒకట్ల స్థానముగ తీసికొంటాము.

7 నుండి తీసివేయగవచ్చు అంకె 4ను పదుల స్థానముగ తీసికొంటాము.

కావున $7^2 = 49$

ఉదాహరణ: 4:6 యొక్క వర్గము 6^2 కావలెను అనుకోండి. 6 పదికి 4 తక్కువ కావున 4 యొక్క వర్గము 16 ను పదుల, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

6 నుండి 4ను తీసివేయగ వచ్చు అంకె 2ను పదుల స్థానమునకు కలపండి.

$$\text{కావున } 6^2 = \begin{array}{r} 16 \\ 20 \\ \hline 36 \end{array}$$

10 కంటే ఎక్కువ సంఖ్య వర్గాలు:

పద్ధతి: ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానము వర్గము ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఒకట్ల స్థానము కలుపగవచ్చు సంఖ్య వందలు పదుల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ 1:11 యొక్క వర్గము 11^2 కావలెను అనుకోండి. ఒకట్ల స్థానపు అంకె యొక్క వర్గము 1ని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. సంఖ్యకు ఒకట్ల స్థానపు అంకె కలుపగవచ్చు 12ను వందలు, పదుల స్థానముగ రాయండి.

ఇపుడు $11^2 = 11 + 1, 1^2 = 121$

ఇట్లే $13^2 = 13 + 3, 3^2 = 169$

$14^2 = 14 + 4, 4^2 = 180 + 16 = 196$

$16^2 = 16 + 6, 6^2 = 220 + 36 = 256$

$19^2 = 19 + 9, 9^2 = 280 + 81 = 361$

ఈ విధముగ 20కి లోపు వర్గాలను మౌఖికముగ లెక్క కట్టుకోవచ్చు.

20 కంటె ఎక్కువ 100కి లోపు వర్గాలు: ఒకట్ల స్థానమును వర్గము చేసి ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

ఒకట్ల స్థానమును సంఖ్యకు కలిపి పదుల స్థానపు అంకెతో గుణించి వందలు, పదుల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు 21 యొక్క వర్గము కావలెను అనుకోండి. 1 యొక్క వర్గము 1ని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

1 ని 21కి కలుపగ వచ్చు $21 + 1 = 22$ని పదుల స్థానపు అంకె 2తో గుణించగ వచ్చు $22 \times 2 = 44$ని వందలు, పదుల స్థానముగ రాయండి.

ఇపుడు $21^2 = (21 + 1)\times 2, 1^2 = 441$

ఇట్లే $22^2 = (22 + 2)\times 2, 2^2 = 484$

$25^2 = (25 + 5) \times 2, 5^2 = 600 + 25 = 625$

$32^2 = (32 + 2) \times 3, 2^2 = 1020 + 4 = 1024$

$45^2 = (45 + 5) \times 4, 5^2 = 2000 + 25 = 2025$

$52^2 = (52 + 2) \times 5, 2^2 = 2700 + 4 = 2704$

$$75^2 = (75+5)\times 7, 5^2 = 5600+25 = 5625$$
$$95^2 = (95+5)\times 9, 5^2 = 9000+25 = 9925$$

ఈ విధముగ వందకిలోపు వర్గాలను సమయస్ఫూర్తిగ లెక్క కట్టుకోవచ్చు.

వంద కంటె ఎక్కువ, 1000 కంటె తక్కువ సంఖ్యల వర్గాలు:

ఒకట్ల స్థానమును వర్గము చేసి పదులు, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. ఒకట్ల స్థానమును సంఖ్యకు కలిపి వందల స్థానముచే గుణించి పదుల స్థానమునకు ముందుగ రాయండి.

ఉదాహరణకు: 102 యొక్క వర్గము కావలెను అనుకోండి.

2 యొక్క వర్గము 4ని ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానములో సున్న రాయండి.

ఒకట్ల స్థానపు అంకె 2ని సంఖ్య 102కు కలుపగ $102+2=104$ వస్తుంది. దీనిని పదుల స్థానమునకు ముందుగ రాయండి.

ఇపుడు $102^2 = (102+2)\times 1, 2^2 = 10404$

$$103^2 = (103+3)\times 1, 3^2 = 10699$$
$$107^2 = (107+7)\times 1, 7^2 = 11449$$
$$115^2 = (115+15)\times 1, 15^2 = 13000+225 = 13225$$

ఈ విధముగ 209 లోపు వర్గాలు లెక్క కట్టుకోవచ్చును. 200, 300, 400......900 కంటె ఎక్కువ వర్గాలు కనుగొనుటకు సంఖ్యకు ఒకట్ల స్థానమును కలిపి 2,3,4.... .... 9లచే వరుసగ గుణించి పదుల స్థానమునకు ముందుగ వ్రాయాలి. ఒకట్ల స్థానపు వర్గమును ఒకట్ల స్థానముగ రాయాలి.

ఉదాహరణకు 203 యొక్క వర్గము కావలెను అనుకోండి. 3 యొక్క వర్గము 9ని పదులు, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

203కు 3 కలుపగవచ్చు సంఖ్య 206ను 2చే గుణించగ వచ్చు 412ను పదుల స్థానమునకు ముందు రాయండి.

ఇపుడు $303^2 = 2(203+3), 3^2 = 40609$

ఇట్లే $206^2 = 2(206+6), 6^2 = 42436$

$$225^2 = 2(225+25), 25^2 = 50000+625 = 50625$$
$$305^2 = 3(305+5), 5^2 = 93000+25 = 93025$$

$$
\begin{aligned}
507^2 &= 5(507+7), 7^2 \\
&= 257000 + 49 = 257049 \\
704^2 &= 7(704+4), 4^2 \\
&= 405600 + 16 = 495616
\end{aligned}
$$

ఇట్లే 800, 900ల కంటె ఎక్కువ వర్గాలను కనుగొనవచ్చును.

5 చివర వున్నపుడు సంఖ్యల వర్గము కనుగొనుట

పద్ధతి: సంఖ్యల వర్గము కనుగొనునపుడు ఒకట్ల స్థానపు అంకె 5 అయినపుడు 5 యొక్క వర్గము, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానపు అంకెకు తరువాతనున్న అంకెతో గుణించగ వచ్చు లబ్ధము వేలు, వందల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణ:

1) 1:15 యొక్క వర్గము 15^2 కావలెను అనుకోండి.

5 యొక్క వర్గము 25ను పదులు, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానపు అంకె 1 తరువాతనున్న అంకె 2తో గుణించగ 2 వస్తుంది. దీనిని వందల స్థానముగ రాయండి. సంఖ్య యొక్క వర్గము 225 అవుతుంది.

2) 25 యొక్క వర్గము 25^2 కావలెను అనుకోండి.

5 యొక్క వర్గము 25ను పదులు, ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి. పదుల స్థానపు అంకె 2 తరువాతనున్న 3ను గుణించగ 6 వస్తుంది. దీనిని వందల స్థానముగ రాయండి. సంఖ్య యొక్క వర్గము 625 అవుతుంది.

ఇట్లే $35^2 = 3 \times 4, 5 \times 5 = 1225$

$65^2 = 6 \times 7, 5 \times 5 = 4225$

చివర 1/2 గల అంకెల వర్గము కనుగొనుట

ఉదాహరణకు $5\frac{1}{2}$ వర్గము $(5\frac{1}{2})^2$ కావలెను అనుకోండి. 5 తరువాతనున్న అంకె 6, వీటి లబ్ధము 5×6=30, తరువాత $\frac{1}{2}$ యొక్క వర్గము $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ను రాయండి.

ఇపుడు $5(\frac{1}{2})^2 = 60\frac{1}{4}$

మరో ఉదాహరణ $15\frac{1}{2}$ వర్గము కావలెను అనుకోండి, 15 తరువాత వచ్చు అంకె 16. వీటి లబ్ధము $15 \times 16 = 240$ తరువాత $\frac{1}{2}$ యొక్క వర్గము $\frac{1}{4}$ను రాయండి.

ఇపుడు $(15\frac{1}{2})^2 = 240\frac{1}{4}$ అవుతుంది. యిట్లే చివర $\frac{1}{2}$ గల ఏ సంఖ్యల వర్గము అయినను కనుగొనవచ్చును.

మొదట అంకెలు సమానముగ నుండి తరువాత నున్న భిన్నముల మొత్తము 1 అయినపుడు లబ్ధము కనుగొనుటకు:

ఉదాహరణ $4\frac{1}{3}$ను $4\frac{2}{3}$చే గుణించగ వచ్చు లబ్ధము కావలెను అనుకోండి.

భిన్నాంకముల మొత్తము $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ కావున 4 తరువాతనున్న అంకె = 5, వీటి లబ్ధము 20 అవుతుంది. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ల లబ్ధము $\frac{2}{9}$ని 20కు పక్కన రాయగ లబ్ధము $20\frac{2}{9}$ అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ: $10\frac{3}{5}, 10\frac{2}{5}$ల లబ్ధము కావలెను అనుకోండి.

భిన్నాంకముల మొత్తము $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$ కావున 10 తరువాతనున్న సంఖ్య 11 వీటి లబ్ధము 110 అవుతుంది. $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}$ల లబ్ధము $\frac{6}{25}$ను 110కి ప్రక్కన వాయగ లబ్ధము $110\frac{6}{25}$ వస్తుంది.

సమాన అంకెలు గల సంఖ్యల వర్గాలు

వీటి వర్గాలను కనుగొనుటకు సులభపద్ధతులున్నాయి. మొదట 11 అనే సంఖ్య వర్గమెంతో కనుగొందుము. ఇది 121 అని తెలుసు. ఇట్లే 111 వర్గము కనుగొనినచో 12321 అవుతుంది, అనిన, వర్గము కనుగొనవలసిన సంఖ్యలో ఎన్ని ఒకట్లు గలవో అన్నవ అంకెను మధ్య రాసి ఇరువైపుల ఒకటి వచ్చు వరకు తగ్గించుకొనుచు పోయినచో వర్గము వస్తుంది. ఈ పద్ధతి ప్రకారము మనం అన్ని స్థానాలలోను '1' గల అంకెల వర్గాలను కనుక్కోవచ్చును. అయితే ఇది 9 స్థానాల అంకెవరకే సాధ్యం.

$$1111^2 = 1234321$$
$$11111^2 = 123454321$$
$$111111^2 = 12345654321$$
$$111111111^2 = 12345678987654321$$

ఇదేపద్ధతి నుపయోగించి అన్ని స్థానములలోను 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9లలో ఏ ఒక్క సంఖ్య ఉన్నా కనుక్కోవచ్చు.

ఉదాహరణకు: 222 అనే సంఖ్య వర్గము కనుక్కోవలెను అనుకోండి. అంటే $2^2 \times (111)^2$ అనే కదా? అందుచేత మొదట 111 వర్గము కనిపెట్టి తరువాత దాన్ని $2^2 = 4$ పెంచితే సరిపోతుంది.

$$\begin{aligned} \text{కావున } 222^2 &= 4 \times 111^2 \\ &= 4(12321) \\ &= 49284 \\ \text{ఇట్లే } 333^2 &= (111) \times 3^2 \\ &= 12321 \times 9 \\ &= 110889 \end{aligned}$$

వర్గమూలములు

వర్గమూలములను కూడ మౌఖికముగ చేయవచ్చును. ఈ కింద వివరించు పద్ధతిని వాడినచో సంపూర్ణ వర్గముల వర్గమూలములను కనుగొనవచ్చును భాగాహార పద్ధతిని వాడనవసరములేదు.

1) ఒకట్లస్థానపు అంకె 5 యున్నపుడు వర్గమూలము కనుగొనుట.

వందల స్థానపు అంకెను రెండు వరుస రాసుల లబ్ధముగ వాయండి. చిన్న విలువను వర్గమూలము యొక్క పదుల స్థానముగ రాయండి. ఒకట్ల స్థానపు విలువ ఎల్లప్పుడు 5 అవుతుంది.

ఉదాహరణకు 625 యొక్క వర్గమూలము కావలెను అనుకోండి. వందల స్థానపు విలువ 6ను 2×3 గ రాయండి. 2 వర్గమూలముయొక్క పదుల స్థానము అవుతుంది. ఒకట్ల స్థానపు విలువ 5 అవుతుంది.

ఇపుడు 625 యొక్క వర్గమూలము 25 అవుతుంది. ఇట్లే 5 ఒకట్లస్థానముగాగల సంఖ్యల వర్గమూలములను కనుగొనవచ్చును.

వర్గ సంఖ్యలు		వర్గమూలములు
25	$0 \times 0, 5 \times 5$	05
225	$1 \times 2, 5 \times 5$	15
625	$2 \times 3, 5 \times 5$	25
1225	$3 \times 4, 5 \times 5$	35
2025	$4 \times 5, 5 \times 5$	45

2) కారణాంకముల పద్ధతిని వర్గమూలములు కనుగొనుట.

వర్గరాసులు	సమాన రాసుల లబ్ధము	వర్గమూలములు
121	11×11	11
144	12×12	12
169	13×13	13

3) మౌఖిక వర్గమూల పద్ధతి:

ఈ పద్ధతిలో 1 నుండి 9 వరకు అంకెల వర్గములు తెలిసినచో 4 అంకెలు గల సంపూర్ణ వర్గముల వర్గమూలమును లెక్క కట్టుకోవచ్చును.

సంఖ్య:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
వర్గము:	1	4	9	16	25	36	49	64	81

పై పట్టికనుంచి ఏదైన వర్గసంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానము 1 అయినచో వర్గమూలము 1 గాని 9 గాని అవుతుంది. ఒకట్ల స్థానము 4 అయినచో వర్గమూలము 2 గాని 8గాని అవుతుంది. ఒకట్ల స్థానము 6 అయినచో వర్గమూలము 4గాని 6గాని అవుతుంది. ఒకట్లస్థానము 9 అయినచో వర్గమూలము 3గాని 7గాని అవుతుంది. ఒకట్లస్థానము 5 అయినచో వర్గమూలము 5 అవుతుంది. వీటిని జ్ఞాపకము పెట్టుకొన్నచో వర్గమూలములను మౌఖికముగ కనుగొనవచ్చును.

పద్ధతి: పదుల స్థానమునకు ముందున్న సంఖ్య ఏ సంఖ్య యొక్క వర్గమునకు తరువాత గలదో ఆ సంఖ్యను పదుల స్థానముగ రాయాలి. తరువాత వర్గములోని ఒక స్థానమును పరిశీలించండి. ఈ అంకె ఏ ఏ అంకెలను వర్గముచేయగ వస్తుందో మనస్సునందుంచుకోండి. వర్గమూలముయొక్క పదుల స్థానపు అంకెను తరువాత అంకెతో గుణించగ వచ్చు సంఖ్య వర్గములోని పదుల స్థానమునకు ముందున్న సంఖ్యకంటే ఎక్కువో తక్కువో తెలిసికోండి. ఎక్కువ అయినచో మనస్సునందుగల తక్కువ అంకె వర్గమూలములోని ఒకట్ల స్థానము అవుతుంది. తక్కువ అయినచో మనస్సులోని ఎక్కువ అంకె వర్గమూలములోని ఒకట్లస్థానముగ తీసికోండి.

ఉదాహరణకు 5776 యొక్క వర్గములము కావలెను అనుకోండి.

పదులస్థానమునకు ముందున్న సంఖ్య 57ను పరిశీలించినచో 7 యొక్క వర్గమునకు తరువాత గలదు. కావున 7 ను పదుల స్థానముగ తీసికోండి.

వర్గములో ఒకట్లస్థానపు అంకె 6 అనునది 4, 6 అంకెలను వర్గముచేయగ ఒకట్ల స్థానముగ వస్తుంది. వీటిని మనస్సు నందుంచుకోండి. వర్గమూలములోని 7ను తరువాత అంకె 8తో గుణించగ $7 \times 8 = 56$ వస్తుంది. ఇది 57

కంటే తక్కువ కావున మనస్సులోగల ఎక్కువ అంకె 6 వర్గమూలములోని ఒకట్లస్థానము అవుతుంది. కావున 5776 యొక్క వర్గమూలము 76 అవుతుంది.

మరో ఉదాహరణ: 2501 యొక్క వర్గమూలము కావలెను అనుకోండి.

24 అనునది 4 యొక్క వర్గమునకు తరువాత కలదు కావున వర్గముయొక్క వర్గమూలములో పదులస్థానపు అంకె 4.

వర్గములోని ఒకట్ల స్థానపు అంకె 1 కావున యిది 1, 9 లను వర్గము చేయగ వస్తుంది. వీటిని మనస్సు నందుంచుకోండి. వర్గమూలములోని పదుల స్థానపు అంకె 4 ను తరువాత అంకె 5తో గుణించగ 20 వస్తుంది, ఇది 24 కంటే తక్కువ కావున మనస్సులోగల అంకెలలో పెద్దది అయిన 9 వర్గమూలము యొక్క ఒకట్లస్థానము అవుతుంది.

ఇపుడు 2401 యొక్క వర్గమూలము 49 గ తీసికోండి. ఇట్లే సమయస్ఫూర్తిగ వర్గమూలాలను లెక్కకట్టుకోవచ్చును.

16. ఘనాలు (Cubes)

బీజ గణిత సూత్రము $(a+b)^3 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$

$$\begin{array}{r} a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \\ 2a^2b + 2ab^2 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

అను సూత్రము ననుసరించి సులభముగ లెక్కకట్టవచ్చును. రెండు అంకెలుగల సంఖ్యలో పదుల స్థానపు అంకె ఘనమును వేలస్థానముగ రాయండి. అంకెల నిష్పత్తిలో గుణశ్రేణిలో నుండునట్లు మిగిలిన వందలు, పదులు, ఒకట్ల స్థానములను రాయండి. వందలు, పదుల స్థానపు అంకెల రెట్టింపు విలువలను వందలు, పదుల స్థానములకు కిందుగ రాసి కలపండి. అపుడు సంఖ్యల ఘనములు లభించును.

ఉదాహరణకు: 11 యొక్క ఘనము కావలెను అనుకోండి. వేల స్థానపు విలువగ 1 యొక్క ఘనము 1ని రాయండి. అంకెల పదానుపాతము 1 కావున 1 చే గుణించగ వచ్చు అంకెలు వరుసగ 1, 1, 1 లను వందలు, పదులు, ఒకట్ల స్థానములుగ రాయండి. పదుల స్థానపు అంకెల రెట్టింపు విలువలను ఆయా స్థానములకు కిందుగ వ్రాయండి.

11^3	=	1	1	1	1
			2	2	
		1	3	3	2

ఉదాహరణ: 2:12 యొక్క ఘనము 12^3 కావలెను అనుకోండి. వేలస్థానము విలువగ 1 యొక్క ఘనము 1ని రాయండి. అంకెల పదానుపాతము 2 కావున 2చే వరుసగ గుణించగ వచ్చు అంకెలను రాయండి. 1, 2, 4, 8లు అవుతాయి. మధ్యనున్న అంకెలను రెట్టింపు చేయగ వచ్చు అంకెలను 2, 4 లకు కిందుగ రాసి కలపండి. సంఖ్యయొక్క ఘనము వస్తుంది.

12^3	=	1	2	4	8
			4	8	
		1	7	2	8

ఇట్లే 13^3	=	1	3	9	27
			6	18	
		2	1	9	7

15^3	=	1	5	25	125
			10	50	
		3	3	8	5

21^3	=	8	4	2	1
			8	4	
		9	2	6	1

23^3	=	8	12	18	27
			24	36	
		12	1	6	7

24^3	=	8	16	32	64
			32	64	
		1	3	8	24

ఇట్లే ఘనాలను కొంచెము అనుభవముతో లెక్క కట్టుకోవచ్చును.

ఘనమూలములు

ఈ క్రింది పద్ధతి నుపయోగించి 5, 6 అంకెలు గల సంఖ్యల ఘనమూలాలను కనుగొనవచ్చును. వీటిని చేయుటకు 1 నుండి 10 అంకెల యొక్క ఘనాలను గుర్తుంచుకోవలెను.

సంఖ్య:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
వర్గము:	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

పై పట్టికనుంచి 1, 4, 5, 6, 9, 0 లు చివరి అంకెలు గల సంఖ్యలు అయినచో ఘనమూలాలు అవే అంకెలవుతాయి. 2తో అంతమయినచో ఘనమూలమును 2, 7తో అంతమయినచో ఘనమూలము 3 అగును. 3తో అంతమయనచో ఘనమూలము 7 అగును.

ఉదాహరణకు 1 2 1 6 7 యొక్క ఘనమూలము కావలెను అనుకోండి.

1 2 1 6 7 ను 12, 167 గ విభజించండి. ఘనముల పట్టిక నుంచి 12 అనునది 2, 3 ల ఘనములకు మధ్య కలదు. కావున ఘనమూలముయొక్క పదుల స్థానము అంకెలలో చిన్న అంకె 2 అవుతుంది. ఒకట్ల స్థానము నిర్ణయించవలెను ఘనములో ఒకట్లస్థానము 7 కావున ఘనమూలములోని ఒకట్ల స్థానము 3 అవుతుంది.

కావున 12, 167 యొక్క ఘనమూలము 23 అగును. ఇట్లే ఘనమూలములను కనుగొనవచ్చును.

చతుర్థమూలములు

చతుర్థమూలములు కనుగొనవలెనన్న రెండు పర్యాయములు వర్గమూలము కనుక్కోవలెను.

ఉదాహరణకు: 256 యొక్క చతుర్థమానము కనుగొనవలెనన్న మొదట వర్గమూలము కనుగొనగ 16 అవుతుంది. మరల 16కు వర్గమూలము కనుగొనగ 4 అవుతుంది. కావున 256 యొక్క చతుర్థ వర్గమూలము 4 అవుతుంది.

17. వేళ్ళతో ఎక్కాలు

5×5 ఎక్కాలవరకు వచ్చినచో వేళతో ఎక్కాలను గుణించుకోవచ్చు. ఎక్కాలను రెండు విధములుగ విభజింపవచ్చు.

పదికిలోపు ఎక్కాలు: రెండు చేతుల వేళ్ళలో చిటికెన వేలును 6 గను, ఉంగరపు వేలును 7 గను, మధ్య వేలును 8 గను, చూపుడు వేలును 9 గను, బొటన వేలును 10 గను తలంచండి, 6నుండి 10 ఎక్కాలవరకు వీటినుపయోగించి గుణించుకోవచ్చు. పిల్లలకు, వయోజనులకు వింతని, వినోదాన్ని కలిగిస్తుంది.



పద్ధతి: మీకు కావలసిన ఎక్కమునకు సంబంధించిన వేళ్ళను పటములో చూపిన విధముగ కలపండి. మిగిలిన వేళ్ళను పైకిలేపండి. కలిపిన వేళ్ళను లెక్కించి అన్ని పదులుగ తలంచండి. ఇరువైపుల పైకి లేపబడిన వేళ్ళను గుణించిన ఒకట్ల స్థానము వస్తుంది.

ఉదాహరణకు: 9×9 లు కావలెను అనుకోండి. పటములో చూపినవిధముగ 9 వ వేలును కలుపగ మొత్తం 8 వేళ్ళు వస్తాయి. వీటిని పదులుగ తలంచండి. ఇరువైపుల ఒక్కొక్క వేలు చొప్పున మిగులును. వీటిని గుణించగ $1 \times 1 = 1$ వస్తుంది. దీనిని ఒకట్లస్థానముగ తలంచండి. ఇపుడు $9 \times 9 = 81$ అవుతుంది. ఇట్లే 9×6 కావలెను అనుకోండి. 9 వ వేలును 6వ వేలును కలుపగ 5 వేళ్ళు అవుతాయి. ఎడమువైపున ఒక వేలు. కుడివైపు 4 వేళ్ళు మిగులుతాయి. వీటిని గుణించగ $1 \times 4 = 4$ వస్తుంది. దీనిని ఒకట్లస్థానముగ రాయగ 54 అవుతుంది. ఇట్లే సమయస్ఫూర్తిగ 10 కి లోపు ఎక్కాలను గుణించుకోవచ్చు.

పదికంటె ఎక్కువ ఎక్కాలు

పదికంటె సంఖ్య ఎంత పెద్దవో అన్ని వేళ్ళను పైకి లేపండి. ఇరువైపుల లేపిన వేళ్ళను గుణించగ వచ్చు అంకెను ఒకట్లస్థానముగ రాయండి.



ఇరువైపుల లేపిన వేళ్ళను కలుపగ వచ్చు అంకెను పదుల స్థానముగ రాయండి.

పదుల స్థానపు అంకెలుగా గల 1, 1 లను గుణించగ వచ్చు అంకె $1 \times 1 = 1$ని వందల స్థానముగ రాయండి.

ఉదాహరణకు: 12×13 లు కావలెను అనుకోండి. వేళ్ళను పటములో చూపిన విధముగ చాచండి. ఎడమ వైపున 2, కుడివైపున 3 వేళ్ళు పైకి వుంచండి.

2, 3 లను గుణించగవచ్చు $2 \times 3 = 6$ను ఒకట్ల స్థానముగ రాయండి.

2, 3 లను కలుపగవచ్చు 2+3=5ను పదుల స్థానముగ రాయండి.

పదుల స్థానములోగల 1, 1 ల లబ్ధము $1 \times 1 = 1$ వందల స్థానముగ రాయండి.

ఇపుడు $12 \times 13 = 1 \times 1, 2+3, 2 \times 3 = 156$ అవుతుంది.

ఇట్లే $13 \times 13 = 1 \times 1, 3+3, 3 \times 3 = 169$

$12 \times 14 = 1 \times 1, 2+4, 2 \times 4 = 168$

$11 \times 15 = 1 \times 1, 1+5, 1 \times 5 = 165$

$12 \times 15 = 1 \times 1, 2+5, 2 \times 5$

$= 170$

$\quad 10$

$\overline{180}$ అవుతుంది.

$$14 \times 14 = 1 \times 1, 4 + 4, 4 \times 4$$

$= 180$ అవుతుంది.

$\quad 16$

$\quad 196$

ఇట్లే సమయస్ఫూర్తిగ ఎక్కాలను గుణించుకోవచ్చు.

పదికిలోపు ఎక్కాలు

గుణించవలసిన అంకెలు పదికి ఎంత తక్కువో ఏదురుగా రాయండి. వాటిని గుణించగ వచ్చు అంకె ఒకట్ల స్థానము అవుతుంది. ఒక అంకెనుండి రెండవ అంకె పదికి ఎంత తక్కువో తీసివేయండి. అది పదుల స్థానము అవుతుంది. ఉదాహరణకు 9×8 కావలెను అనుకోండి.

$$\begin{array}{r} 9-1 \\ 8-2 \\ \hline 9-2, 1 \times 2 \\ \hline \end{array} = 72$$

ఇట్లే

$$\begin{array}{r} 7 \times 7, 7-3 \\ 7-3 \\ \hline 7-3, 3 \times 3 \\ \hline \end{array} = 49$$

$$\begin{array}{r} 7 \times 8, 7-3 \\ 8-2 \\ \hline 7-2, 3 \times 2 \\ \hline \end{array} = 56$$

* * *



డా॥ తోటకూర సత్యనారాయణరాజు

ఎమ్.యస్‌సి., ఎమ్.ఇడి., పిహెచ్.డి.

లెక్కల టీచర్లందరూ లెక్కలు బోధిస్తారు కాని లెక్కలోకి వచ్చే లెక్కల టీచర్లు చాలా అరుదనే చెప్పాలి. అటువంటి అరుదైన వ్యక్తి, సహృదయులు డా॥ తోటకూర సత్యనారాయణరాజు భీమవరం తాలూకా ఉండి గ్రామంలో జన్మించారు.

భీమవరం డి.యన్.ఆర్. కాలేజీలో లెక్కల లెక్చరర్‌గా పని చేసిన శ్రీ రాజు గారు అదే కాలేజీలో డిగ్రీ స్థాయి వరకు చదివారు. బెనారసు హిందూ విశ్వవిద్యాలయం నుండి ఎం.యస్‌సి. (గణిత శాస్త్రం) డిగ్రీ పొందారు. శ్రీ రాజు గారు గణిత విజ్ఞానంలో స్వయంకృషితో ఎంతో ఎత్తుకు ఎదిగారు. గణితం ఆబాలగోపాలం హాయిగా నేర్చుకునేందుకు ఎన్నో నూతన ప్రక్రియలను రూపొందించారు. టి.వి.లోనూ, రేడియోలోనూ, లయన్స్, రోటరీ సమావేశాలలోనూ, విద్యాసంస్థలలోనూ నూతన పద్ధతుల ద్వారా గణితం మీద ఆసక్తి కలిగించుటకు ప్రయత్నిస్తున్నారు. దేశమంతటా అనేక సదస్సులలో పాల్గొన్నారు. యు.జి.సి. ప్రోగ్రామ్స్ ద్వారా గణితంపై అనేక ప్రోగ్రామ్స్ యిచ్చారు. ప్రస్తుతం అమెరికాలో వుంటూ గణితశాస్త్రంలో ఉపన్యాసాలు, ప్రసంగాలు, పరిశోధనలు చేస్తున్నారు.

అత్యంత ప్రజాదరణ పొందిన వీరి రచనలు ...

అంకెలతో ఆటలు	**గణిత విజ్ఞానము**
చేతివ్రేళ్ళే కంప్యూటర్లు	**అందరికీ గణితం**
వేద గణితము	**MATHS FOR FUN**